УДК 519.977

Ю. С. Осипов, А. В. Кряжимский, Е. А. Ровенская

ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПАРАМЕТРЕ СОВМЕСТНОСТИ: МЕТОД КОНСТРУКТИВНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

1. Описание задачи

Под задачей об оптимальном параметре совместности мы понимаем задачу о нахождении минимального значения скалярного параметра однопараметрического семейства операторных уравнений, при котором соответствующее уравнение из этого семейства имеет решение в пределах заданного множества (последнее также может зависеть от параметра). Содержательные мотивировки задачи об оптимальном параметре совместности приведены в [20] и [29]; там же, при определенных предположениях, построены и обоснованы итерационные методы решения задачи для случая семейств линейных уравнений. В [12] рассмотрено приложение метода из [29] к решению задачи оптимального быстродействия для линейной управляемой системы с выпуклыми ограничениями. В [16] предложено обобщение данного метода для некоторых семейств нелинейных операторных уравнений.

Итак, пусть в нормированном пространстве X с нормой $|\cdot|_X$ выделено некоторое замкнутое ограниченное множество X_0. Пусть Y – гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y$ и нормой $|\cdot|_Y$, порожденной этим скалярным произведением, p_0, p^0 – действительные числа такие, что $p^0 \geqslant p_0$ (допускается $p^0 = \infty$, при $p^0 = \infty$ символ $[p, p^0]$ будет обозначать полуинтервал $[p, \infty)$). Рассматриваемые ниже задачи об оптимальном параметре совместности имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} p &\to \min, \\ F(p,x) &= b(p), \\ x &\in X(p), \\ p &\in [p_0, p^0]; \end{aligned} \tag{1.1}$$

здесь $F(\cdot,\cdot)$ – функция из $[p_0, p^0] \times X_0$ в Y, $b(\cdot)$ – функция из $[p_0, p^0]$ в Y и $(X(p))_{p\in[p_0,p^0]}$ – однопараметрическое семейство подмножеств множества X_0. Таким образом, задача (1.1) требует нахождения наименьшего значения скалярного параметра $p \in [p_0, p^0]$, при котором зависящее от этого параметра уравнение $F(p, x) = b(p)$ имеет решение в пределах заданного множества $X(p)$; нахождению подлежит также само это решение.

Каждую из задач (1.1) будем рассматривать при следующих условиях:

(A1) множество всех допустимых элементов задачи (1.1) непусто;

(A2) многозначное отображение $p \mapsto X(p)$ непрерывно в том смысле, что если $x_k \in X(p_k)$ $(k = 0, 1, \ldots)$, $p_k \to \overline{p}$ и $x_k \to \overline{x}$, то $\overline{x} \in X(\overline{p})$;

(A3) функции $p \mapsto b(p)$ и $(p, x) \mapsto F(p, x)$ непрерывны;

(A4) функция $(p, x) \mapsto F(p, x) - b(p)$ обладает следующим свойством: для любой последовательности (p_k, x_k) из $[p_0, p^0] \times X_0$ такой, что $|F(p_k, x_k) - - b(p_k)|_Y \to 0$ и (p_k) сходится, последовательность (x_k) компактна в X (в [22] функция, обладающая подобным свойством, названа компактификатором);

(A5) для каждого p из отрезка $[p_0, p_* + \gamma]$, где p_* – оптимальное значение задачи (1.1), а γ – некоторое положительное число, множество $F(p, X(p)) = = \{F(p, x) : x \in X(p)\}$ выпукло;

(A6) многозначное отображение $p \mapsto X(p)$ монотонно возрастает на $[p_0, p_*]$, т. е. $X(p_1) \subset X(p_2)$ при любых $p_1 \in [p_0, p_*]$, $p_2 \in [p_1, p_*]$;

(A7) для каждого $p \in [p_0, p_*]$ множество $F(p, X(p))$ замкнуто в Y;

(A8) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всяких $p_1 \in [p_0, p_*]$, $p_2 \in [p_1, p_*]$ таких, что $p_2 - p_1 < \delta$, и всякого $x \in X(p_1)$ выполняется $|F(p_1, x) - F(p_2, x)|_Y < \varepsilon$;

(A9) множество $\displaystyle\bigcup_{p \in [p_0, p_*]} F(p, X(p))$ ограничено в Y;

(A10) при всяком $\ell \in Y$ функция $p \mapsto c(\ell \mid F(p, X(p)))$ непрерывна на $[p_0, p_*]$.

Здесь и далее $c(\cdot|W)$ – опорный функционал непустого множества $W \subset Y$: $c(\ell|W) = \sup_{y \in W} \langle \ell, y \rangle$ $(\ell \in Y)$.

Нетрудно показать (см. [16]), что если задача (1.1) удовлетворяет условиям (A1)–(A4), то она имеет решение и множество всех ее решений имеет вид $\{p_*\} \times X_*$, где p_* – ее оптимальное значение и X_* – компакт в X.

Заметим, что задачи (1.1) не являются, вообще говоря, задачами выпуклого программирования и стандартные оптимизационные алгоритмы градиентного типа (см., например, [3]) могут быть неприменимы для нахождения их глобальных решений. В [16] построен и обоснован итерационный алгоритм решения задач вида (1.1), удовлетворяющих условиям (A1)–(A10).

В данной работе задача (1.1) рассматривается при неточных данных $\widehat{F}(\cdot, \cdot)$, $\widehat{b}(\cdot)$ и $\widehat{X}(\cdot)$, отклоняющихся от ее (неизвестных) точных данных $F(\cdot, \cdot)$,

$b(\cdot)$ и $X(\cdot)$ не больше, чем на заданные (малые) величины погрешностей. В этих условиях задача становится, вообще говоря, некорректной. Следуя в русле теории некорректных задач [5, 13, 18] (см. также [1, 4, 14, 19]), мы предлагаем конструктивный метод регуляризации задачи (1.1) — построения устойчивых приближений к ее решению. Исследование продолжает работы [7–12, 21–30], посвященные развитию принципа экстремального сдвига Н. Н. Красовского [6] в контексте задач оптимизации. Отметим, что для случая, когда функции $x \mapsto F(p,x)$ линейны, итерационный метод регуляризации задачи (1.1) построен в [29].

Итак, пусть $\widehat{D}$ – какое-либо непустое множество троек $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot))$. Пусть в $\widehat{D}$ выделено некоторое непустое подмножество D, каждый элемент $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot))$ которого удовлетворяет условиям (A1)–(A4). Всякую задачу (1.1) такую, что $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot)) \in D$, будем называть допустимой; при этом тройку $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot))$ будем называть данными этой задачи. Как отмечено выше, каждая допустимая задача имеет решение.

В соответствии со стандартным подходом теории некорректных задач предполагаем, что мы имеем дело с некоторой конкретной задачей (1.1), априорная информация о которой исчерпывается тем, что эта задача допустима. Кроме того, предполагаем, что в результате уточнения данных $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot))$ этой задачи становится известным некоторое их приближение – тройка $(\widehat{F}(\cdot,\cdot), \widehat{b}(\cdot), \widehat{X}(\cdot))$ из множества $\widehat{D}$ и оценки погрешности h^F, h^b, $h^X \geqslant 0$ такие, что

$$\left|\widehat{F}(p,x) - F(p,x)\right|_Y \leqslant h^F \quad (p \in [p_0, p^0],\ x \in V_X[X(p), \ell] \bigcap X_0), \tag{1.2}$$

$$\left|\widehat{b}(p) - b(p)\right|_Y \leqslant h^b \quad (p \in [p_0, p^0]), \tag{1.3}$$

$$\chi(\widehat{X}(p), X(p)) \leqslant h^X \quad (p \in [p_0, p^0]); \tag{1.4}$$

в (1.2) и далее ℓ – фиксированное положительное число и $V_X[X_1, h]$ – замкнутая h-окрестность множества X_1 в пространстве X $(h \geqslant 0)$; в (1.4) и далее $\chi(X_1, X_2)$ – хаусдорфово расстояние между ограниченными множествами X_1, X_2 в пространстве X.

Для удобства приложений (в частности, приложения, рассмотренного в последнем разделе настоящей работы) будем считать, что информация о приближениях $\widehat{X}(p)$ множеств $X(p)$ может быть, вообще говоря, точнее, чем (1.4). Именно, пусть с каждым непустым множеством $X_1 \subset X_0$ и каждым $h \geqslant 0$ связано множество $V_X^0[X_1, h]$ такое, что $X_1 \subset V_X^0[X_1, \bar{c}h] \subset V_X[X_1, h]$, где $\bar{c} > 0$ – не зависящий от X_1 и h параметр. Будем считать, что имеют место вложения

$$X(p) \subset V_X^0[\widehat{X}(p), \bar{c}h^X], \quad \widehat{X}(p) \subset V_X^0[X(p), \bar{c}h^X] \quad (p \in [p_0, p^0]). \tag{1.5}$$

Ясно, что соотношение (1.5) влечет (1.4) и совпадает с (1.4) в случае, когда $V_X^0[\widehat{X}(p), h^X] = V_X[\widehat{X}(p), h^X]$.

Множество всех $(\widehat{F}(\cdot,\cdot), \widehat{b}(\cdot), \widehat{X}(\cdot)) \in \widehat{D}$, удовлетворяющих соотношениям (1.2), (1.3), (1.5) при заданном $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot)) \in D$, будем обозначать через $\widehat{D}(h^F, h^b, h^X \mid F(\cdot,\cdot),\ b(\cdot), X(\cdot))$. Заметим, что приближенные данные $(\widehat{F}(\cdot,\cdot), \widehat{b}(\cdot), \widehat{X}(\cdot))$ в общем случае выходят за пределы множества D, и, таким образом, задача (1.1), данные которой заменены на приближенные данные $(\widehat{F}(\cdot,\cdot), \widehat{b}(\cdot), \widehat{X}(\cdot))$, вообще говоря, не является допустимой; в частности для такой задачи может быть пустым множество ее допустимых элементов.

Пример. Пусть $X = Y = \mathbb{R}^1$, $p_0 = 0$, $\widehat{F}_h(p,x) = x - h$, $F(p,x) = x$, $b(p) = p$, $X(p) = [-1, 0]$, $D = \{(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot))\}$ и $\widehat{D} = \{(\widehat{F}_h(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot)) : h \in [0,1]\}$. Допустимое множество задачи (1.1) с данными $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot))$ состоит из одного элемента $(0,0)$, в то время как допустимое множество задачи с данными $(\widehat{F}_h(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot))$ пусто для любого $h > 0$.

Семейство $(R_{h^F,h^b,h^X})_{h^F,h^b,h^X \geqslant 0}$ операторов, действующих из множества $\widehat{D}$ в $[p_0, p^0] \times X_0$, называется регуляризирующим алгоритмом, если для любых допустимых данных $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot)) \in D$, любых сходящихся к нулю неотрицательных последовательностей (h_j^F), (h_j^b), (h_j^X) и любой последовательности $(\widehat{F}_j(\cdot,\cdot), \widehat{b}_j(\cdot), \widehat{X}_j(\cdot))$ такой, что

$$(\widehat{F}_j(\cdot,\cdot), \widehat{b}_j(\cdot), \widehat{X}_j(\cdot)) \in \widehat{D}(h_j^F, h_j^b, h_j^X | F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot)) \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

последовательность (p_j, x_j) вида

$$(p_j, x_j) = R_{h_j^F, h_j^b, h_j^X}(\widehat{F}_j(\cdot,\cdot), \widehat{b}_j(\cdot), \widehat{X}_j(\cdot)) \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

сходится к множеству $\{p_*\} \times X_*$ всех решений допустимой задачи (1.1) с данными $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot))$, т. е.

$$p_j \to p_*, \quad \operatorname{dist}(x_j, X_*) \to 0 \quad (j \to \infty).$$

Заметим, что решение допустимой задачи (1.1), вообще говоря, не является непрерывной функцией от данных задачи, что говорит о ее некорректности.

Пример. Пусть $X = Y = \mathbb{R}^1$, $p_0 = 0.5$,

$$\widehat{F}_h(p,x) = px + h, \quad F(p,x) = px, \quad b(p) = p,$$
$$\widehat{X}_h(p) = [1-h, 1], \quad X(p) = \{1\},$$
$$\widehat{D} = \{(\widehat{F}_h(\cdot,\cdot), b(\cdot), \widehat{X}_h(\cdot)) : h \in [0,1]\}, \quad D = \{(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot))\}.$$

Ясно, что $(F_h(\cdot,\cdot), b(\cdot), X_h(\cdot)) \in \widehat{D}(h, 0, h \mid F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot))$ для $h > 0$. Задача (1.1) с данными $(\widehat{F}_h(\cdot,\cdot), b(\cdot), \widehat{X}_h(\cdot))$ имеет единственное решение

$$(p_*(h), x_*(h)) = \begin{cases} (1, 1-h), & h > 0, \\ (0.5, 1), & h = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $p_*(h) \not\to p_*(0)$ при $h \to 0$.

Приведенный пример, в частности, показывает, что даже в случае, когда каждая допустимая задача имеет единственное решение и ее приближенные данные не выходят за пределы данных допустимых задач (т. е. $\widehat{D} = D$), оператор решения, ставящий в соответствие данным $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot))$ каждой допустимой задачи ее решение не доставляет (одноэлементный) регуляризирующий алгоритм.

2. Регуляризирующий алгоритм

Далее полагаем, что множество D допустимых данных состоит из таких троек $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot)) \in \widehat{D}$, которые удовлетворяют условиям (A1)–(A10). Также предполагаем выполненным следующее условие на класс D:

(A11) существует функция $\kappa(\cdot) : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ такая, что $\kappa(h) \to 0$ при $h \to 0$ и для всех $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot)) \in D$, $p \in [p_0, p^0]$ и $h \geqslant 0$

$$F(p, V_X^0[X(p), h]) \subset V_Y[F(p, X(p)), \kappa(h)]; \tag{2.1}$$

здесь и далее $V_Y[Y_1, h]$ – замкнутая h-окрестность множества Y_1 в пространстве Y $(h \geqslant 0)$.

Кроме того, будем полагать, что существуют такие $L > 0$, $\lambda > 0$, что для всех $(\widehat{F}(\cdot,\cdot), \widehat{b}(\cdot), \widehat{X}(\cdot)) \in \widehat{D}$

$$\left|\widehat{F}(p, x) - \widehat{b}(p)\right|_Y \leqslant L \quad (p \in [p_0, p^0],\ x \in V_X^0[\widehat{X}(p), \bar{c}\lambda]). \tag{2.2}$$

Наконец, будем предполагать, что множества $V_X^0[X_1, h]$ $(X_1 \subset X_0, h \geqslant 0)$, фигурирующие в (1.5), удовлетворяют следующим условиям:

$$\text{если } X_1 \subset X_2, \text{ то } V_X^0[X_1, h] \subset V_X^0[X_2, h], \tag{2.3}$$

$$\text{если } X_2 \subset V_X^0[X_1, h_1] \text{ и } X_3 \subset V_X^0[X_2, h_1], \text{ то } X_3 \subset V_X^0[X_1, h_1 + h_2] \tag{2.4}$$

(условия (2.3), (2.4) позволяют трактовать $V_X^0[X_1, h]$ как некоторую h-окрестность множества X_1).

Для построения итерационного метода решения задачи (1.1) с данными $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot))$ введем множество M всех вероятностных мер μ на классе Σ всех подмножеств X_0, являющихся выпуклыми комбинациями мер Дирака, т. е. имеющих вид

$$\mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \delta_{x_i}, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, \quad x_1, \ldots, x_m \in X_0.$$

Для функции $F(\cdot,\cdot) : [p_0, p^0] \times X_0 \mapsto Y$ при всяких $p \in [p_0, p^0]$ и $\mu \in M$ элемент $F(p, \mu)$ зададим по

$$F(p, \mu) = \int F(p, x)\, \mu(dx) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int F(p, x)\, \delta_{x_i}(dx) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F(p, x_i).$$

Через $M(E)$, где E – непустое подмножество X_0, будем обозначать множество всех $\mu \in M$, сосредоточенных на E, т. е. таких, что $\mu(E) = 1$.

В основу искомого конструктивного регуляризирующего алгоритма положим следующий итерационный метод.

Пусть заданы приближенные данные $(\widehat{F}(\cdot,\cdot), \widehat{b}(\cdot), \widehat{X}(\cdot)) \in \widehat{D}$ задачи (1.1) и оценки h^F, h^b, h^X их погрешностей. На нулевом шаге выбирается

$$\mu_0 \in M(V_X^0[\widehat{X}(p_0), \bar{c}h^X]) \tag{2.5}$$

и набор (p_0, μ_0) принимается в качестве начального элемента последовательности. На шаге $k+1$ по элементу $(p_k, \mu_k) \in [p_0, p^0] \times M$ задается элемент $(p_{k+1}, \mu_{k+1}) \in [p_0, p^0] \times M$.

Находится оптимальное значение p_{k+1} в следующей задаче минимизации:

$$\begin{aligned} & p \to \inf, \\ & p \in [p_k, p^0], \\ \left\langle \widehat{F}(p_k, \mu_k) - \widehat{b}(p_k), \widehat{F}(p, \nu) - \widehat{b}(p) \right\rangle_Y \leqslant {} & L(h^F + h^b), \\ & \nu \in M(V_X^0[\widehat{X}(p), \bar{c}h^X]) \end{aligned} \tag{2.6}$$

(заметим, что данная задача может не иметь решения). Затем определяется элемент

$$\nu_{k+1} \in M(V_X^0[\widehat{X}(p_{k+1}), \bar{c}h^X]) \tag{2.7}$$

такой, что

$$\left\langle \widehat{F}(p_k, \mu_k) - \widehat{b}(p_k), \widehat{F}(p_{k+1}, \nu_{k+1}) - \widehat{b}(p_{k+1}) \right\rangle_Y \leqslant 3(h^F + h^b)L + (2h^X + \kappa(h^X))L. \tag{2.8}$$

Далее определяется значение τ_{k+1} как решение одномерной задачи минимизации

$$\tau_{k+1} = \arg \min_{\tau \in [0,1]} \left| \widehat{F}(p_{k+1}, (1-\tau)\mu_k + \tau\nu_{k+1}) - \widehat{b}(p_{k+1}) \right|^2_Y \tag{2.9}$$

и полагается

$$\mu_{k+1} = (1-\tau_{k+1})\mu_k + \tau_{k+1}\nu_{k+1}. \tag{2.10}$$

Лемма 2.1. *Пусть* $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot)) \in D$ *и* $(\widehat{F}(\cdot,\cdot), \widehat{b}(\cdot), \widehat{X}(\cdot)) \in \widehat{D}(h^F, h^b, h^X \mid F(\cdot,\cdot), b(\cdot),\ X(\cdot))$. *Тогда последовательность* (p_k, μ_k) *определена алгоритмом* (2.5)–(2.10) *корректно, точнее*

(*i*) *для каждого* $k = 1, 2, \ldots$ *задача* (2.6) *имеет допустимый элемент, причем*

$$p_0 \leqslant \ldots \leqslant p_k \leqslant \ldots \leqslant p_*; \tag{2.11}$$

(*ii*) *для каждого* $k = 1, 2, \ldots$ *существует* $v_{k+1} \in V^0_X[\widehat{X}(p_{k+1}), \overline{c}h^X]$ *такое, что*

$$\nu_{k+1} = \delta_{v_{k+1}} \in M(V^0_X[\widehat{X}(p_{k+1}), \overline{c}h^X])$$

удовлетворяет (2.8);

(*iii*) *существует решение* τ_{k+1} *задачи* (2.9);

(*iv*) *соотношение* (2.10) *определяет меру*

$$\mu_{k+1} \in M\left(\bigcup_{i=0}^{k+1} V^0_X[\widehat{X}(p_i), \overline{c}h^X] \right). \tag{2.12}$$

Доказательство. Докажем утверждение (i). Для этого рассмотрим пару (p_*, δ_{x_*}), где (p_*, x_*) решает задачу (1.1) с данными $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot))$. Обозначим $\widehat{\ell}_k = \widehat{F}(p_k, \mu_k) - \widehat{b}(p_k)$. Заметим, что, согласно (2.2), $|\widehat{\ell}_k| \leqslant L$. С учетом (1.2), (1.3) имеем

$$\left\langle \widehat{\ell}_k, \widehat{F}(p_*, \delta_{x_*}) - \widehat{b}(p_*) \right\rangle_Y \leqslant \left\langle \widehat{\ell}_k, F(p_*, x_*) - b(p_*) \right\rangle_Y + \left\langle \widehat{\ell}_k, \widehat{F}(p_*, x_*) - \right.$$
$$\left. - F(p_*, x_*) \right\rangle_Y - \left\langle \widehat{\ell}_k, \widehat{b}(p_*) - b(p_*) \right\rangle_Y \leqslant L(h^F + h^b).$$

Кроме того, на основании (1.5)

$$x_* \in X(p_*) \subset V^0_X[\widehat{X}(p_*), \overline{c}h^X]$$

или

$$\delta_{x_*} \in M(V^0_X[\widehat{X}(p_*), \overline{c}h^X]).$$

Таким образом, (p_*, δ_{x_*}) – допустимый элемент задачи (2.6) и, следовательно, $p_{k+1} \leqslant p_*$. Неравенства (2.11) имеют место в силу ограничения $p \geqslant p_k$ в задаче (2.6).

Покажем (ii). Пусть (p,ν) – произвольный допустимый элемент задачи (2.6), т. е.

$$\big\langle\widehat{\ell}_k, \widehat{F}(p,\nu)-\widehat{b}(p)\big\rangle_Y \leqslant L(h^F+h^b).$$

Тогда, в силу (1.2), (1.3),

$$\begin{aligned}\big\langle\widehat{\ell}_k, F(p,\nu)-b(p)\big\rangle_Y &\leqslant \big\langle\widehat{\ell}_k, \widehat{F}(p,\nu)-\widehat{b}(p)\big\rangle_Y - \\ &- \big\langle\widehat{\ell}_k, \widehat{F}(p,\nu)-F(p,\nu)\big\rangle_Y + \big\langle\widehat{\ell}_k, \widehat{b}(p)-b(p)\big\rangle_Y \leqslant \\ &\leqslant 2L(h^F+h^b).\end{aligned}$$

Ослабляя это неравенство, перейдем в его левой части к инфимуму по всем $\nu\in M(V_X^0[\widehat{X}(p),\bar{c}h^X])$. Получим

$$-c\big(-\widehat{\ell}_k \mid F(p,V_X[\widehat{X}(p),h^X])\big) - \big\langle\widehat{\ell}_k, b(p)\big\rangle_Y \leqslant 2L(h^F+h^b). \tag{2.13}$$

Вследствие (1.5) $\widehat{X}(p)\subset V_X^0[X(p),\bar{c}h^X]$, поэтому

$$V_X^0[\widehat{X}(p),\bar{c}h^X]\subset V_X[\widehat{X}(p),h^X]\bigcap X_0\subset V_X[X(p),2h^X],$$

и, следовательно, из (2.13) вытекает неравенство

$$-c\big(-\widehat{\ell}_k \mid F(p,V_X[X(p),h^X]\bigcap X_0)\big) - 2h^X L - \big\langle\widehat{\ell}_k, b(p)\big\rangle_Y \leqslant 2L(h^F+h^b).$$

Учитывая (2.1), приходим к

$$-c\big(-\widehat{\ell}_k \mid V_Y[F(p,X(p)),\kappa(h^X)]\big) - \big\langle\widehat{\ell}_k, b(p)\big\rangle_Y \leqslant 2L(h^F+h^b+h^X)$$

или

$$-c\big(-\widehat{\ell}_k \mid F(p,X(p))\big) - \big\langle\widehat{\ell}_k, b(p)\big\rangle_Y \leqslant 2L(h^F+h^b+h^X)+\kappa(h^X)L.$$

При устремлении p к p_k из непрерывности функций $b(\cdot)$ (условие (A3)) и $c\big(-\widehat{\ell}_k \mid F(\cdot,X(\cdot))\big)$ (условие (A10)) имеем

$$-c\big(-\widehat{\ell}_k \mid F(p_{k+1},X(p_{k+1}))\big) - \big\langle\widehat{\ell}_k, b(p_{k+1})\big\rangle_Y \leqslant 2L(h^F+h^b+h^X)+\kappa(h^X)L. \tag{2.14}$$

Из выпуклости множества $F(p_{k+1},X(p_{k+1}))$ (условие (A5)) следует, что существует такой элемент $v_{k+1}\in X(p_{k+1})$, что

$$c\big(-\widehat{\ell}_k \mid F(p_{k+1},X(p_{k+1}))\big) = \big\langle -\widehat{\ell}_k, F(p_{k+1},v_{k+1})\big\rangle_Y.$$

Полагая $\nu_{k+1} = \delta_{v_{k+1}}$ и учитывая (1.2), (1.3), получаем

$$\begin{aligned}\big\langle\widehat{\ell}_k, \widehat{F}(p_{k+1},\nu_{k+1}) - \widehat{b}(p_{k+1})\big\rangle_Y &= \big\langle\widehat{\ell}_k, \widehat{F}(p_{k+1},v_{k+1}) - \widehat{b}(p_{k+1})\big\rangle_Y \leqslant \\ &\leqslant \big\langle\widehat{\ell}_k, F(p_{k+1},v_{k+1}) - b(p_{k+1})\big\rangle_Y + \big\langle\widehat{\ell}_k, \widehat{F}(p_{k+1},v_{k+1}) - \\ &- F(p_{k+1},v_{k+1})\big\rangle_Y - \big\langle\widehat{\ell}_k, \widehat{b}(p_{k+1}) - b(p_{k+1})\big\rangle_Y \leqslant \\ &\leqslant -c\big(-\widehat{\ell}_k | F(p_{k+1}, X(p_{k+1}))\big) - \big\langle\widehat{\ell}_k, b(p_{k+1})\big\rangle_Y + L(h^F + h^b) \leqslant \\ &\leqslant 3L(h^F + h^b) + (2h^X + \kappa(h^X))L;\end{aligned}$$

последнее неравенство следует из (2.14). Этим доказано утверждение (ii).

Утверждение (iii) очевидно.

Докажем (iv). Воспользуемся методом индукции. На первом шаге согласно (2.10) имеем $\mu_1 = (1-\tau_1)\mu_0 + \tau_1\nu_1$. Так как $\mu_0 \in M(V_X^0[\widehat{X}(p_0), \overline{c}h^X])$, $\nu_0 \in M(V_X^0[\widehat{X}(p_1), \overline{c}h^X])$, то

$$\mu_1 \in M(V_X^0[\widehat{X}(p_0), \overline{c}h^X] \bigcup V_X^0[\widehat{X}(p_1), \overline{c}h^X]).$$

Аналогично, если

$$\mu_k \in \left(\bigcup_{i=0}^{k} V_X^0[\widehat{X}(p_i), \overline{c}h^X]\right),$$

то, ввиду (2.10) и (2.7), получаем (2.12). Лемма доказана.

Для исследования определенного выше итерационного метода (2.5)–(2.10) потребуется следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Пусть неотрицательные последовательности* (β_k), (γ_k) *таковы, что для всех* $k = 1, 2, \ldots$

$$\gamma_{k+1} \leqslant (1 - \alpha\gamma_k)\gamma_k + \beta_k \tag{2.15}$$

и $\beta_k \to \overline{\beta}$. *Тогда*

$$\varlimsup_{k\to\infty} \gamma_k \leqslant \left(\frac{\overline{\beta}}{\alpha}\right)^{1/2} + \overline{\beta}. \tag{2.16}$$

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Из сходимости $\beta_k \to \overline{\beta}$ следует, что $|\beta_k - \overline{\beta}| < \varepsilon$ при всех $k \geqslant k_0$ для некоторого $k_0 \geqslant 1$. Тогда из (2.15) для всех $k \geqslant k_0$ имеем

$$\gamma_{k+1} \leqslant \gamma_k - \alpha\gamma_k^2 + \overline{\beta} + \varepsilon. \tag{2.17}$$

Покажем, что существует $k_1 \geqslant k_0$ такой, что

$$\gamma_{k_1} \leqslant \gamma_* + \overline{\beta} + \varepsilon, \tag{2.18}$$

где

$$\gamma_* = \left(\frac{\overline{\beta + 2\varepsilon}}{\alpha}\right)^{1/2}. \tag{2.19}$$

Допустим, что это неверно: для всех $k \geqslant k_0$

$$\gamma_k \geqslant \gamma_* + \overline{\beta} + \varepsilon. \tag{2.20}$$

Тогда для всех $k \geqslant k_0$

$$\alpha\gamma_k^2 \geqslant \alpha\gamma_*^2 = \overline{\beta} + 2\varepsilon,$$

откуда, согласно (2.17),

$$\gamma_{k+1} \leqslant \gamma_k - (\overline{\beta} + 2\varepsilon) + \overline{\beta} + \varepsilon = \gamma_k - \varepsilon.$$

Значит, для некоторого $k \geqslant k_0$ (2.20) нарушается. Противоречие показывает, что существует $k_1 \geqslant k_0$, для которого верно (2.18). Покажем, что

$$\gamma_j < \gamma_* + \overline{\beta} + \varepsilon \tag{2.21}$$

для всех $j \geqslant k_1$. Допустим, что это не так. Пусть $k+1$ – наименьший из номеров $j \geqslant k_1$, для которых (2.21) нарушается. Вследствие (2.18) $k+1 > k_1$. Имеем

$$\gamma_{k+1} \geqslant \gamma_* + \overline{\beta} + \varepsilon, \quad \gamma_k < \gamma_* + \overline{\beta} + \varepsilon. \tag{2.22}$$

Предположим, что $\gamma_k \geqslant \gamma_*$ или, что то же самое, $\alpha\gamma_k^2 \geqslant \overline{\beta} + 2\varepsilon$. Тогда из (2.18) следует, что

$$\gamma_{k+1} \geqslant \gamma_k - \varepsilon,$$

что невозможно, поскольку, в силу (2.22), $\gamma_{k+1} > \gamma_k$. Таким образом, $\gamma_k < \gamma_*$. Тогда по (2.22)

$$\gamma_{k+1} \leqslant \gamma_k + \overline{\beta} + \varepsilon < \gamma_* + \overline{\beta} + \varepsilon,$$

что противоречит первому неравенству в (2.22). Полученное противоречие показывает, что (2.21) выполняется для всех $j \geqslant k_1$. Отсюда

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \gamma_k \leqslant \gamma_* + \overline{\beta} + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ и определения γ_* (2.19) имеем (2.16). Лемма доказана.

Основное свойство итерационного алгоритма (2.5)–(2.10) отражено в следующей лемме.

Лемма 2.3. *Существует положительная скалярная функция трех неотрицательных аргументов* $\delta(\cdot,\cdot,\cdot)\colon (h^F,h^b,h^X)\mapsto\delta(h^F,h^b,h^X)$ *со свойством: если* $(F(\cdot,\cdot),b(\cdot),X(\cdot))\in D$, $(\widehat{F}(\cdot,\cdot),\widehat{b}(\cdot),\widehat{X}(\cdot))\in\widehat{D}(h^F,h^b,h^X|\ F(\cdot,\cdot),b(\cdot),X(\cdot))$ *и последовательность* (p_k,μ_k) *задана алгоритмом* (2.5)–(2.10), *то*

$$p_k\to\overline{p}\in[p_0,p_*]\quad(k\to\infty),\tag{2.23}$$

где p_* *– оптимальное значение в задаче* (1.1) *с данными* $(F(\cdot,\cdot),b(\cdot),X(\cdot))$, *и*

$$\varlimsup_{k\to\infty}\bigl|F(p_k,\mu_k)-b(p_k)\bigr|_Y^2\leqslant\delta(h^F,h^b,h^X).\tag{2.24}$$

Замечание. Функция $\delta(\cdot,\cdot,\cdot)$ может быть задана явно (см. формулы (2.32), (2.33) в доказательстве леммы).

Доказательство. Пусть

$$(F(\cdot,\cdot),b(\cdot),X(\cdot))\in D,\quad(\widehat{F}(\cdot,\cdot),\widehat{b}(\cdot),\widehat{X}(\cdot))\in\widehat{D}(h^F,h^b,h^X|F(\cdot,\cdot),b(\cdot),X(\cdot))$$

и последовательность (p_k,μ_k) определена алгоритмом (2.5)–(2.10). Сходимость (2.23) следует из леммы 2.1.

Введем следующие обозначения:

$$H(p,\mu)=F(p,\mu)-b(p),\quad\widehat{H}(p,\mu)=\widehat{F}(p,\mu)-\widehat{b}(p)\quad(p\in[p_0,p^0],\ \mu\in M),$$

$$\mu_k(\tau)=\mu_k+\tau(\nu_{k+1}-\mu_k)\quad(\tau\in[0,1]).$$

Имеем

$$\begin{aligned}\bigl|\widehat{H}(p_{k+1},\mu_k(\tau))\bigr|_Y^2=(1-\tau)^2\bigl|\widehat{H}(p_{k+1},\mu_k)\bigr|_Y^2+\tau^2\bigl|\widehat{H}(p_{k+1},\nu_{k+1})\bigr|_Y^2+\\+2\tau(1-\tau)\bigl\langle\widehat{H}(p_{k+1},\mu_k),\widehat{H}(p_{k+1},\nu_{k+1})\bigr\rangle_Y.\end{aligned}\tag{2.25}$$

Учитывая предположение (2.2), заменяя (p_{k+1},μ_k) на (p_k,μ_k) и добавляя появляющуюся разность, продолжим (2.25):

$$\bigl|\widehat{H}(p_{k+1},\mu_k(\tau))\bigr|_Y^2\leqslant(1-2\tau)\bigl|\widehat{H}(p_k,\mu_k)\bigr|_Y^2+2\tau^2L^2+\alpha_k(\tau)+\xi_k(\tau),\tag{2.26}$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_k(\tau)&=2\tau(1-\tau)\bigl\langle\widehat{H}(p_{k+1},\mu_k),\widehat{H}(p_{k+1},\nu_{k+1})\bigr\rangle_Y,\\ \xi_k(\tau)&=(1-2\tau)\Bigl[\bigl|\widehat{H}(p_{k+1},\mu_k)\bigr|_Y^2-\bigl|\widehat{H}(p_k,\mu_k)\bigr|_Y^2\Bigr]+\\&\quad+2\tau(1-\tau)\bigl\langle\widehat{H}(p_{k+1},\mu_k)-\widehat{H}(p_k,\mu_k),\widehat{H}(p_{k+1},\nu_{k+1})\bigr\rangle_Y.\end{aligned}\tag{2.27}$$

Заметим, что поскольку (p_{k+1}, ν_{k+1}) удовлетворяет (2.8), то

$$\alpha_k(\tau) \leqslant 3L(h^F + h^b) + (2h^X + \kappa(h^X))L \quad (\tau \in [0,1]).$$

Из (2.27) имеем оценку

$$\xi_k(\tau) \leqslant \xi_k \quad (\tau \in [0,1]),$$

где

$$\xi_k = \big|\widehat{H}(p_{k+1}, \mu_k)\big|_Y^2 - \big|\widehat{H}(p_k, \mu_k)\big|_Y^2 + 2\big\langle \widehat{H}(p_{k+1}, \mu_k) - \widehat{H}(p_k, \mu_k), \widehat{H}(p_{k+1}, \nu_{k+1})\big\rangle_Y. \tag{2.28}$$

Рассмотрим первое слагаемое в (2.28). Имеем, с учетом (2.2),

$$\begin{aligned}
\big|\widehat{H}(p_{k+1}, \mu_k)\big|_Y^2 - \big|\widehat{H}(p_k, \mu_k)\big|_Y^2 \leqslant \\
&\leqslant \big(\big|\widehat{H}(p_{k+1}, \mu_k)\big|_Y + \big|\widehat{H}(p_k, \mu_k)\big|_Y\big) \times \big(\big|\widehat{H}(p_{k+1}, \mu_k)\big)_Y - \big|\widehat{H}(p_k, \mu_k)\big|_Y\big) \leqslant \\
&\leqslant 2L\big|\widehat{H}(p_{k+1}, \mu_k) - \widehat{H}(p_k, \mu_k)\big|_Y \leqslant \\
&\leqslant 2L\big(\big|\widehat{F}(p_{k+1}, \mu_k) - \widehat{F}(p_k, \mu_k)\big|_Y + \big|\widehat{b}(p_{k+1}) - \widehat{b}(p_k)\big|_Y\big).
\end{aligned}$$

Ввиду (1.2), (1.3) имеют место оценки

$$\begin{gathered}
\big|\widehat{F}(p_{k+1}, \mu_k) - \widehat{F}(p_k, \mu_k)\big|_Y \leqslant 2h^F + \big|F(p_{k+1}, \mu_k) - F(p_k, \mu_k)\big|_Y, \\
\big|\widehat{b}(p_{k+1}) - \widehat{b}(p_k)\big|_Y \leqslant 2h^b + \big|b(p_{k+1}) - b(p_k)\big|_Y,
\end{gathered}$$

что приводит к

$$\begin{aligned}
\big|\widehat{H}(p_{k+1}, \mu_k)\big|_Y^2 - \big|\widehat{H}(p_k, \mu_k)\big|_Y^2 \leqslant 2L\big(\big|F(p_{k+1}, \mu_k) - F(p_k, \mu_k)\big|_Y + \\
+ \big|b(p_{k+1}) - b(p_k)\big|_Y\big) + 4L(h^F + h^b).
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Аналогично, для второго слагаемого в (2.28) получим

$$\big\langle \widehat{H}(p_{k+1}, \mu_k) - \widehat{H}(p_k, \mu_k), \widehat{H}(p_{k+1}, \nu_{k+1})\big\rangle_Y \leqslant$$

$$\leqslant L(|F(p_{k+1}, \mu_k) - F(p_k, \mu_k)|_Y + |b(p_{k+1}) - b(p_k)|_Y) + 2L(h^F + h^b). \tag{2.30}$$

По (2.28)–(2.30) получаем, что $\xi_k \leqslant \overline{\xi}_k$, где

$$\overline{\xi}_k = 8L(h^F + h^b) + 4L\left(|F(p_{k+1}, \mu_k) - F(p_k, \mu_k)|_Y + |b(p_{k+1)} - b(p_k)|_Y\right).$$

Из непрерывности функций $F(\cdot,\cdot)$, $b(\cdot)$ (условие (A3)) и условия (A3) следуют сходимости $|F(p_{k+1}, \mu_k) - F(p_k, \mu_k)|_Y \to 0$, $|b(p_{k+1}) - b(p_k)|_Y \to 0$. Значит, $\overline{\xi}_k \to 8L(h^F + h^b)$.

Вернемся теперь к оценке (2.26). Так как по (2.8)

$$\tau_{k+1} = \arg\min_{\tau\in[0,1]} \left|\widehat{F}(p_{k+1},\mu_k(\tau)) - \widehat{b}(p_{k+1})\right|_Y^2,$$

то

$$\begin{gathered}\left|\widehat{H}(p_{k+1},\mu_{k+1})\right|_Y^2 \leqslant \min_{\tau\in[0,1]} \Big\{ (1-2\tau)\left|\widehat{H}(p_k,\mu_k)\right|_Y^2 + 2\tau^2L^2 + \\ +\overline{\xi}_k + 3L(h^F+h^b) + (2h^X+\kappa(h^X))L\Big\} = \\ = \left(1 - \frac{\left|\widehat{H}(p_k,\mu_k)\right|_Y^2}{2L^2}\right)\left|\widehat{H}(p_k,\mu_k)\right|_Y^2 + \overline{\xi}_k + 3L(h^F+h^b) + (2h^X+\kappa(h^X))L.\end{gathered}$$

Обозначая

$$\alpha = \frac{1}{2L^2}, \quad \beta_k = \overline{\xi}_k + 3L(h^F+h^b) + (2h^X+\kappa(h^X))L, \quad \gamma_k = \left|\widehat{H}(p_k,\mu_k)\right|_Y^2$$

$$(k=1,2,\ldots),$$

получим, что последовательность (γ_k) удовлетворяет условиям леммы 2.2, значит,

$$\varlimsup_{k\to\infty} \left|\widehat{H}(p_{k+1},\mu_{k+1})\right|_Y^2 \leqslant \delta_1(h^F,h^b,h^X), \tag{2.31}$$

где

$$\begin{gathered}\delta_1(h^F,h^b,h^X) = 2L\Big(11L(h^F+h^b) + (2h^X+\kappa(h^X))L\Big)^{1/2} + \\ + 11L(h^F+h^b) + (2h^X+\kappa(h^X))L.\end{gathered} \tag{2.32}$$

В силу (1.2), (1.3), (2.2)

$$\begin{gathered}\left|H(p_{k+1},\mu_{k+1})\right|_Y^2 \leqslant \Big(\left|\widehat{H}(p_{k+1},\mu_{k+1})\right|_Y + h^F + h^b\Big)^2 \leqslant \\ \leqslant \left|\widehat{H}(p_{k+1},\mu_{k+1})\right|_Y^2 + 2L(h^F+h^b) + (h^F+h^b)^2.\end{gathered}$$

Отсюда и из (2.31) получаем

$$\varlimsup_{k\to\infty} \left|H(p_k,\mu_k)\right|_Y^2 \leqslant \delta(h^F,h^b,h^X),$$

где

$$\delta(h^F,h^b,h^X) = \delta_1(h^F,h^b,h^X)2L + 2L(h^F+h^b) + (h^F+h^b)^2. \tag{2.33}$$

Таким образом, верно (2.24). Ясно, что $\delta(h^F,h^b,h^X) \to 0$ при $h^F,h^b,h^X \to 0$. Лемма доказана.

Приведем реализацию алгоритма (2.5)–(2.10), в которой задача (2.6) имеет упрощенную форму, а именно сводится к задаче скалярной оптимизации с последующим вычислением экстремального элемента в пространстве X.

На нулевом шаге выбираются

$$v_0 \in V_X^0[\widehat{X}(p_0), \bar{c}h^X], \quad \alpha_0^{(0)} = 1 \tag{2.34}$$

и набор $(p_0, v_0, \alpha_0^{(0)})$ выбирается в качестве начального элемента последовательности. На шаге $k+1$ по набору $(p_k, \alpha_0^{(k)}, \ldots, \alpha_k^{(k)}, v_0, \ldots, v_k)$, где

$$p_k \geqslant p_0, \quad \alpha_0^{(k)}, \ldots, \alpha_k^{(k)} \in [0,1], \quad v_0, \ldots, v_k \in X_0,$$

находится набор $(p_{k+1}, \alpha_0^{(k+1)}, \ldots, \alpha_{k+1}^{(k+1)}, v_0, \ldots, v_{k+1})$, где

$$p_{k+1} \geqslant p_0, \quad \alpha_0^{(k+1)}, \ldots, \alpha_{k+1}^{(k+1)} \in [0,1], \quad v_0, \ldots, v_{k+1} \in X_0.$$

Полагается

$$\widehat{\ell}_k = \widehat{b}(p_k) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(k)} \widehat{F}(p_k, v_i), \tag{2.35}$$

$$\widehat{\varphi}_k(p) = c(\widehat{\ell}_k | \widehat{F}(p, V_X^0[\widehat{X}(p), \bar{c}h^X)) - \langle \widehat{\ell}_k, \widehat{b}(p) \rangle_Y \quad (p \in [p_k, p^0]) \tag{2.36}$$

и находится число

$$p_{k+1} = \inf\{p \in [p_k, p^0] : \ \widehat{\varphi}_k(p) \geqslant -L(h^F + h^b)\}. \tag{2.37}$$

Далее определяется элемент $v_{k+1} \in V_X^0[\widehat{X}(p_{k+1}), \bar{c}h^X]$ такой, что

$$\langle \widehat{\ell}_k, \widehat{F}(p_{k+1}, v_{k+1}) - \widehat{b}(p_{k+1}) \rangle_Y \geqslant -3(h^F + h^b)L - (2h^X + \kappa(h^X))L. \tag{2.38}$$

Значение τ_{k+1} определяется из

$$\tau_{k+1} = \begin{cases} 0, & \tau_{k+1}^* < 0, \\ \tau_{k+1}^*, & \tau_{k+1}^* \in [0,1], \\ 1, & \tau_{k+1}^* > 1, \end{cases} \quad \tau_{k+1}^* = \frac{\langle \widehat{q}_{k+1}, \widehat{b}(p_{k+1}) - \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^{(k)} \widehat{F}(p_{k+1}, v_i) \rangle_Y}{|\widehat{q}_{k+1}|_Y^2}, \tag{2.39}$$

$$\Bigl(\widehat{q}_{k+1} = \widehat{F}(p_{k+1}, v_{k+1}) - \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^{(k)} \widehat{F}(p_{k+1}, v_i) \not\equiv 0\Bigr),$$

$$\tau_{k+1} \in [0,1] \quad (\widehat{q}_{k+1} \equiv 0). \tag{2.40}$$

Полагается

$$\alpha_i^{(k+1)} = (1 - \tau_{k+1}) \alpha_i^{(k)} \quad (i = 0, \ldots, k), \quad \alpha_{k+1}^{(k+1)} = \tau_{k+1}. \tag{2.41}$$

Замечание. Корректность алгоритма (2.34)–(2.41) следует из леммы 2.1 (в частности, существование элемента $v_{k+1} \in V_X^0[\widehat{X}(p_{k+1}), \overline{c}h^X]$, удовлетворяющего (2.39), следует из утверждения (ii) этой леммы).

Для реализации (2.34)–(2.41) алгоритма (2.5)–(2.10) лемма 2.3 конкретизируется следующим образом.

Лемма 2.4. *Пусть*

$$(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot)) \in D, \quad (\widehat{F}(\cdot,\cdot), \widehat{b}(\cdot), \widehat{X}(\cdot)) \in \widehat{D}(h^F, h^b, h^X | F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot))$$

и последовательность $(p_k, \alpha_0^{(k)}, \ldots, \alpha_k^{(k)}, v_k)$ *определена алгоритмом* (2.34)–(2.41). *Тогда*

$$p_k \to \overline{p} \in [p_0, p_*] \quad (k \to \infty)$$

и

$$\varlimsup_{k\to\infty} \left| \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^{(k)} F(p_k, v_i) - b(p_k) \right|_Y^2 \leqslant \delta(h^F, h^b, h^X),$$

где $\delta(\cdot,\cdot,\cdot)$ – *функция, определенная в лемме* 2.3.

Для построения искомого регуляризирующего алгоритма на базе описанного выше итерационного метода потребуется следующая лемма.

Лемма 2.5. *Пусть* (i) $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot)) \in D$, $\{p_*\} \times X_*$ – *множество всех решений задачи* (1.1) *с данными* $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot))$; (h_j^F), (h_j^b), (h_j^X) – *сходящиеся к нулю неотрицательные последовательности и*

$$(\widehat{F}_j(\cdot,\cdot), \widehat{b}_j(\cdot), \widehat{X}_j(\cdot)) \in \widehat{D}(h_j^F, h_j^b, h_j^X | F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot)) \quad (j = 1, 2, \ldots); \tag{2.42}$$

(ii) $p_j \in [p_0, p^0]$ *и*

$$\mu_j \in M\left(\bigcup_{i=0}^{m_j} V_X^0[\widehat{X}_j(p_i), \overline{c}h_j^X] \right)$$

таковы, что

$$p_j \leqslant p_* \quad (j = 1, 2, \ldots), \tag{2.43}$$

$$\left| \widehat{F}_j(p_j, \mu_j) - \widehat{b}_j(p_j) \right|_Y \to 0 \quad (j \to 0); \tag{2.44}$$

(iii) $x_j \in V_X^0[\widehat{X}_j(p_j), \overline{c}h_j^X]$ *таково, что*

$$\left| \widehat{F}(p_j, x_j) - \widehat{F}(p_j, \mu_j) \right|_Y \leqslant \inf_{x \in V_X[\widehat{X}_k(p_j), h_j^X]} \left| \widehat{F}(p_j, x) - \widehat{F}(p_j, \mu_j) \right|_Y + \zeta_j \quad (j = 1, 2, \ldots), \tag{2.45}$$

где $\zeta_j \to 0$ $(j \to 0)$.

Тогда последовательность (p_j, x_j) *сходится к множеству* $\{p_*\} \times X_*$*:*

$$p_j \to p_* \quad (j \to \infty), \tag{2.46}$$

$$\mathrm{dist}(x_j, X_*) \to 0 \quad (j \to \infty). \tag{2.47}$$

Доказательство. Возьмем произвольное достаточно большое натуральное j. Из (2.42) и (1.5) следует, что

$$X(p) \subset V_X^0[\widehat{X}_j(p), h_j^X], \quad \widehat{X}_j(p) \subset V_X^0[X(p), h_j^X] \quad (p \in [p_0, p^0]), \tag{2.48}$$

а из условия (A11) следует, что

$$F(p, V_X^0[X(p), \overline{c}h_j^X]) \subset V_Y[F(p, X(p)), \kappa(h_j^X)] \quad (p \in [p_0, p^0]). \tag{2.49}$$

Так как j велико, то можно считать, что $2h_j^X < l$, где l определено в (1.2). Поэтому, в силу (2.48),

$$V_X[\widehat{X}_j(p_j), h_j^X] \subset V_X[X(p_j), l].$$

Отсюда, из (2.42) и из (1.2)

$$\left|\widehat{F}_j(p_j, x) - F(p_j, x)\right|_Y \leqslant h_j^F \quad (x \in V_X^0[\widehat{X}_j(p_j), h_j^X]). \tag{2.50}$$

Вследствие (2.50) имеем

$$\mu_j = \sum_{i=1}^{m_j} \alpha_i^{(j)} \delta_{x_i^{(j)}},$$

где

$$\alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_{m_j}^{(j)} \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{m_j} \alpha_i^{(j)} = 1, \quad x_1^{(j)}, \ldots, x_{m_j}^{(j)} \in \bigcup_{i=0}^{m_j} V_X^0[\widehat{X}_j(p_i), \overline{c}h_j^X].$$

Из монотонного возрастания многозначного отображения $X(\cdot)$ (условие (A6)), (2.48) и (2.3), (2.4) следует, что

$$\bigcup_{i=0}^{m_j} V_X^0[\widehat{X}_j(p_i), \overline{c}h_j^X] \in \bigcup_{i=0}^{m_j} V_X^0[X_j(p_j), 2h_j^X] = V_X^0[X(p_j), 2h_j^X].$$

Из последних включений ввиду (2.49) получаем

$$F(p_j, x_i^{(j)}) \subset V_Y[F(p_j, X(p_j)), \kappa(2h_j^X)] \quad (i = 1, \ldots, m_j). \tag{2.51}$$

Принимая во внимание неравенства (2.43), по условию (A5) заключаем, что множество $F(p_j, X(p_j))$ выпукло. Поэтому его замкнутая $\kappa(2h_j^X)$-окрестность $V_Y[F(p_j, X(p_j)), \kappa(2h_j^X)]$ также выпукла. Отсюда и из (2.51) вытекает, что

$$F(p_j, \mu_j) = \sum_{i=1}^{m_j} \alpha_i^{(j)} F(p_j, x_i^{(j)}) \subset V_Y[F(p_j, X(p_j)), \kappa(2h_j^X)].$$

Таким образом, существует элемент $\overline{x}_j \in X(p_j)$ такой, что

$$\big|F(p_j, \mu_j) - F(p_j, \overline{x}_j)\big|_Y \leqslant \kappa(2h_j^X). \tag{2.52}$$

Из (2.50), (2.52) следует, что при больших j (таких, что $2h_j^X < l$) верно

$$\big|F(p_j, \mu_j) - \widehat{F}_j(p_j, \mu_j)\big|_Y \leqslant h_j^F.$$

Тогда с учетом (1.3) имеем

$$\big|F(p_j, \mu_j) - b(p_j)\big|_Y \leqslant \big|\widehat{F}_j(p_j, \mu_j) - \widehat{b}_j(p_j)\big| + h_j^F + h_j^b.$$

Значит, согласно (2.44),

$$\big|F(p_j, \mu_j) - b(p_j)\big|_Y \to 0.$$

Отсюда и из (2.52) следует, что

$$\big|F(p_j, \overline{x}_j) - b(p_j)\big|_Y \to 0. \tag{2.53}$$

Сопоставляя (2.43) и (2.53), приходим к сходимости (2.46).

Докажем сходимость (2.47). Исходя из (2.45), для произвольного достаточно большого j оценим сверху норму $\big|F(p_j, x_j) - F(p_j, \mu_j)\big|_Y$. Рассмотрим введенный выше элемент $\overline{x}_j \in X(p_j)$, для которого выполняется оценка (2.53). Вследствие (2.48) $X(p_j) \subset V_X[\widehat{X}_j(p_j), h_j^X]$, и поэтому $\overline{x}_j \in V_X[\widehat{X}_j(p_j), h_j^X]$. Отсюда по (2.50)

$$\big|\widehat{F}_j(p_j, \overline{x}_j) - F(p_j, \overline{x}_j)\big|_Y \leqslant h_j^F.$$

Используя эту оценку вместе с (2.53), получаем

$$\begin{aligned}\big|\widehat{F}(p_j, \overline{x}_j) - \widehat{F}(p_j, \mu_j)\big|_Y &\leqslant \big|\widehat{F}_k(p_j, \overline{x}_j) - F(p_j, \overline{x}_j)\big|_Y + \\ &+ \big|F(p_j, \overline{x}_j) - F(p_j, \mu_j)\big|_Y + \big|\widehat{F}_j(p_j, \mu_j) - F(p_j, \mu_j)\big|_Y \leqslant \\ &\leqslant h_j^F + \kappa(h_j^X) + h_j^F = 2h_j^F + \kappa(2h_j^X) = \nu_j. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Поэтому для первого слагаемого в правой части (2.53) имеем

$$\inf_{x\in V_X[\widehat{X}_j(p_j),h_j^X]} \left|\widehat{F}(p_j,x)-\widehat{F}(p_j,\mu_j)\right|_Y \leqslant \nu_j.$$

Следовательно, для элемента $x_j \in V[\widehat{X}_j(p_j),h_j^X]$, определяемого из (2.45), выполняется

$$\left|\widehat{F}(p_j,x_j)-\widehat{F}(p_j,\mu_j)\right|_Y \leqslant \nu_j+\zeta_j. \tag{2.55}$$

С помощью этой оценки получим оценку сверху для $\left|F(p_j,x_j)-F(p_j,\mu_j)\right|_Y$ тем же способом, каким была получена оценка (2.54). Сначала заметим, что по (2.50)

$$\left|\widehat{F}_j(p_j,x_j)-F(p_j,x_j)\right|_Y \leqslant h_j^F.$$

Используя эту оценку вместе с оценками (2.55) и (2.53), получаем

$$\begin{aligned}\left|F(p_j,x_j)-F(p_j,\mu_j)\right|_Y &\leqslant \left|F_j(p_j,x_j)-\widehat{F}(p_j,x_j)\right|_Y + \\ &+\left|\widehat{F}(p_j,x_j)-\widehat{F}(p_j,\mu_j)\right|_Y+\left|\widehat{F}_j(p_j,\mu_j)-F(p_j,\mu_j)\right|_Y \leqslant \\ &\leqslant h_j^F+\nu_j+\zeta_j+h_j^F=2h_j^F+\nu_j+\zeta_j=\eta_j. \end{aligned}\tag{2.56}$$

Отсюда, привлекая (2.45), заключаем, что

$$\left|F(p_j,x_j)-b(p_j)\right|_Y \leqslant 2h_j^F+2h_j^b+\eta_j. \tag{2.57}$$

Как видно из (2.56) и (2.54), $\eta_j\to 0$ при $j\to\infty$. Поэтому из (2.57) следует, что

$$\left|F(p_j,x_j)-b(p_j)\right|_Y \to 0 \quad (k\to\infty). \tag{2.58}$$

Так как отображение $(p,x)\mapsto F(p,x)-b(p)$ – компактификатор (см. условие (A4)), то из сходимостей (2.46) и (2.58) следует компактность последовательности (x_j) в X.

Теперь введем в рассмотрение элементы $x_j^*\in X(p_j)$, «близкие» к x_j, точнее такие, что

$$|x_j-x_j^*|_X \leqslant \inf_{x\in X(p_j)} |x_j-x|_X+1/j.$$

Из того что $x_j\in V[\widehat{X}_j(p_j),h_j^X]$, следует

$$|x_j-x_j^*|_X\to 0 \quad (j\to\infty). \tag{2.59}$$

Отсюда и из компактности последовательности (x_j) в X вытекает, что последовательность (x_j^*) также компактна в X. Данный факт и сходимость (2.46) говорят о том, что последовательность (p_j, x_j^*) удовлетворяет условиям леммы 1.1 из [16]. Применяя эту лемму и учитывая сходимость (2.46), получаем

$$\inf_{x\in X(p_*)} |x_j^* - x|_X \to 0 \quad (j \to \infty).$$

Тогда, согласно (2.59),

$$\inf_{x\in X(p_*)} |x_j - x|_X \to 0 \quad (j \to \infty). \tag{2.60}$$

Получим теперь нужную сходимость (2.47). Так как последовательность (x_j) компактна в X, то для доказательства сходимости (2.47) достаточно установить, что для произвольной предельной точки x_* последовательности (x_j) пара (p_*, x_*) есть решение задачи (1.1) или, что то же, $x_* \in X_*$. Пусть x_* – произвольная предельная точка последовательности (x_j). Из (2.60) и замкнутости множества $X(p_*)$ (см. условие (A2)) следует, что $x_* \in X(p_*)$. Из (2.57) и непрерывности функций $F(\cdot,\cdot)$ и $b(\cdot)$ (см. условие (A3)) получаем, что $F(p_*, x_*) = b(p_*)$. Таким образом, (p_*, x_*) – допустимый элемент задачи (1.1). Так как p_* – оптимальное значение в задаче (1.1), то (p_*, x_*) – ее решение. Тем самым сходимость (2.47) установлена. Доказательство леммы закончено.

Основываясь на леммах 2.3–2.5, дадим формулировку конструктивного регуляризирующего алгоритма. Зафиксируем произвольные положительные функции $w(\cdot,\cdot,\cdot)$, $\zeta(\cdot,\cdot,\cdot)$ трех неотрицательных аргументов такие, что

$$w(h^F, h^b, h^X) \to 0, \quad \zeta(h^F, h^b, h^X) \to 0 \quad \text{при} \quad h^F, h^b, h^X \to 0.$$

Также зафиксируем функцию $\delta(\cdot,\cdot,\cdot)$, фигурирующую в лемме 2.2 (см. также замечание 2.1).

Для произвольных $h^F, h^b, h^X \geqslant 0$ введем оператор R_{h^F,h^b,h^X}, действующий из $\widehat{D}$ в $[p_0, p^0] \times X_0$ следующим образом. Пусть $(\widehat{F}(\cdot,\cdot), \widehat{b}(\cdot), \widehat{X}(\cdot)) \in \widehat{D}$. Если не существует тройки $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot)) \in D$ такой, что

$$(\widehat{F}(\cdot,\cdot), \widehat{b}(\cdot), \widehat{X}(\cdot)) \in \widehat{D}(h^F, h^b, h^X | F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot)) \tag{2.61}$$

(такой случай при правильном задании погрешностей приближенных данных не реализуется, его описываем лишь для соблюдения формальной строгости изложения), то

$$(\widehat{p}, \widehat{x}) = R_{h^F,h^b,h^X}(\widehat{F}(\cdot,\cdot), \widehat{b}(\cdot), \widehat{X}(\cdot)) \tag{2.62}$$

полагается произвольным элементом из $[p_0, p^0] \times X_0$. Если тройка $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot)) \in D$, удовлетворяющая (2.61), существует, то

(i) с помощью итерационного алгоритма (2.34)–(2.41) строится последовательность $(p_k, \alpha_0^{(k)}, \ldots, \alpha_k^{(k)}, v_k)$ и находится такой номер $\widehat{k}$, что выполняется

$$\left|\sum_{i=0}^{\widehat{k}} \alpha_i^{(\widehat{k})} \widehat{F}(p_{\widehat{k}}, v_i) - \widehat{b}(p_{\widehat{k}})\right| \leqslant \delta^{\frac{1}{2}}(h^F, h^b, h^X) + (h^F + h^b) + w(h^F, h^b, h^X); \quad (2.63)$$

(ii) определяется такой $x_{\widehat{k}} \in V_X[\widehat{X}(p_{\widehat{k}}), h^X]$, что

$$\left|\widehat{F}(p_{\widehat{k}}, x_{\widehat{k}}) - \sum_{i=0}^{\widehat{k}} \alpha_i^{(\widehat{k})} \widehat{F}(p_{\widehat{k}}, v_i)\right|_Y \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{x \in V_X[\widehat{X}(p_{\widehat{k}}), h^X]} \left|\widehat{F}(p_{\widehat{k}}, x) - \sum_{i=0}^{\widehat{k}} \alpha_i^{(\widehat{k})} \widehat{F}(p_{\widehat{k}}, v_i)\right|_Y + \zeta(h^F, h^b, h^X); \quad (2.64)$$

(iii) значение $(\widehat{p}, \widehat{x})$ (2.62) полагается равным $(p_{\widehat{k}}, x_{\widehat{k}})$.

Замечание. Из леммы 2.3 и оценок (1.2), (1.3) следует, что номер $\widehat{k}$, удовлетворяющий (2.63), существует. Таким образом, оператор R_{h^F, h^b, h^X} определен корректно. Неравенство (2.63) задает критерий остановки итерационного алгоритма (2.34)–(2.41). Элемент $(\widehat{p}, \widehat{x}) = (p_{\widehat{k}}, x_{\widehat{k}})$, вычисляемый на шаге $\widehat{k}$ этого алгоритма, задает значение оператора R_{h^F, h^b, h^X} (см. (2.62)) на приближенных данных $(\widehat{F}(\cdot, \cdot), \widehat{b}(\cdot), \widehat{X}(\cdot))$.

Замечание. Очевидно, что может быть построен упрощенный регуляризирующий оператор Q_{h^F, h^b, h^X}, нацеленный на приближение лишь оптимального значения p_* задачи (1.1) и являющийся вариантом оператора R_{h^F, h^b, h^X}. Упрощение состоит в устранении достаточно трудоемкой операции (ii) по нахождению приближения $\widehat{x}$ к множеству X_* всех x-компонент решения задачи (1.1).

Теорема 2.1. *Семейство $(R_{h^F, h^b, h^X})_{h^F, h^b, h^X \geqslant 0}$ есть регуляризирующий алгоритм.*

Доказательство. Пусть $(F(\cdot, \cdot), b(\cdot), X(\cdot)) \in D$, $(h_j^F,)$ $(h_j^b,)$ (h_j^X) – сходящиеся к нулю неотрицательные последовательности и

$$(\widehat{F}_j(\cdot, \cdot), \widehat{b}_j(\cdot), \widehat{X}_j(\cdot)) \in \widehat{D}(h_j^F, h_j^b, h_j^X | F(\cdot, \cdot), b(\cdot), X(\cdot)) \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Пусть $(p_j, x_j) = R_{h_j^F, h_j^b, h_j^X}(\widehat{F}_j(\cdot, \cdot), \widehat{b}_j(\cdot), \widehat{X}_j(\cdot))$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Следует показать, что

$$p_j \to p_*, \quad \mathrm{dist}(x_j, X_*) \to 0, \quad (2.65)$$

где $\{p_*\} \times X_*$ – множество всех решений задачи (1.1) с данными $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot))$. Используем леммы 2.5, 2.4 и 2.1. Для каждого $j = 1, 2, \ldots$ по определению оператора (R_{h^F,h^b,h^X}) (см. (2.62)–(2.64)) имеем

$$(p_j, x_j) = (p_{j\widehat{k}_j}, x_{j\widehat{k}_j}), \tag{2.66}$$

$$\left|\sum_{i=0}^{\widehat{k}_j} \alpha_{j\,i}^{(\widehat{k}_j)} \widehat{F}(p_{j\widehat{k}_j}, v_{j\,i}) - \widehat{b}(p_{j\widehat{k}_j})\right|_Y \leqslant \beta_j, \tag{2.67}$$

где

$$\beta_j = \delta^{\frac{1}{2}}(h_j^F, h_j^b, h_j^X) + h_j^F + h_j^b + w(h_j^F, h_j^b, h_j^X), \tag{2.68}$$

$$\widehat{x}_{j_{\widehat{k}_j}} \in V_X[\widehat{X}(p_{j\widehat{k}_j}), h_j^X], \tag{2.69}$$

$$\left|\widehat{F}(p_{j_{\widehat{k}_j}}, \widehat{x}_{j_{\widehat{k}_j}}) - \sum_{i=0}^{\widehat{k}_j} \alpha_{j\,i}^{(\widehat{k}_j)} \widehat{F}(p_{j_{\widehat{k}_j}}, v_{j\,i})\right|_Y \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{x \in V_X[\widehat{X}(p_{j_{\widehat{k}_j}}), h_j^X]} \left|\widehat{F}(p_{j\widehat{k}_j}, x) - \sum_{i=0}^{\widehat{k}_j} \alpha_{j_i}^{(\widehat{k}_j)} \widehat{F}(p_{j_{\widehat{k}_j}}, v_{j\,i})\right|_Y + \zeta_j, \tag{2.70}$$

где

$$\zeta_j = \zeta(h_j^F, h_j^b, h_j^X), \tag{2.71}$$

при этом $\widehat{k}_j$ – некоторое натуральное число, $(p_{j\,k}, \alpha_{j\,0}^{(k)}, \ldots, \alpha_{j\,k}^{(k)}, v_{j\,k})$ $(k = 1, \ldots, \widehat{k}_j)$ – последовательность, построенная с помощью итерационного алгоритма (2.34)–(2.41) на основании возмущенных данных $(\widehat{F}(\cdot,\cdot), \widehat{b}(\cdot), \widehat{X}(\cdot)) = (\widehat{F}_j(\cdot,\cdot), \widehat{b}_j(\cdot), \widehat{X}_j(\cdot))$ и погрешностей $h^F = h_j^F$, $h^b = h_j^b$, $h^X = h_j^X$. Введя вероятностные меры

$$\mu_j = \sum_{i=0}^{\widehat{k}_j} \delta_{v_{j\,i}} \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

и пользуясь (2.66), перепишем (2.67), (2.70) и (2.69) в виде

$$\left|\widehat{F}_j(p_j, \mu_j) - \widehat{b}(p_j)\right|_Y \leqslant \beta_j,$$

$$x_j \in V_X[\widehat{X}(p_j), h_j^X], \tag{2.72}$$

$$\left|\widehat{F}_j(p_j, x_j) - \widehat{F}(p_j, \mu_j)\right|_Y \leqslant \inf_{x \in V_X[\widehat{X}(p_j), h_j^X]} |\widehat{F}(p_j, x) - \widehat{F}(p_j, \mu_j)|_Y + \zeta_j. \tag{2.73}$$

Проверим, что последовательность (p_j, μ_j, x_j) удовлетворяет условиям леммы 2.5. Соотношения (2.50), (2.43) из условия (ii) этой леммы выполняются в силу леммы 2.1. Последнее соотношение данного условия (см. (2.44)) – сходимость

$$\left|\widehat{F}_j(p_j,\mu_j)-\widehat{b}_j(p_j)\right|_Y\to 0\quad (j\to\infty)\text{ —}$$

вытекает из (2.70) и (2.68). Условие (iii) леммы 2.5 обеспечивается соотношениями (2.72), (2.73) и (2.71). Теперь, применяя к последовательности (p_j,μ_j,x_j) лемму 2.5, получаем требуемую сходимость (2.65). Теорема доказана.

3. Регуляризирующий алгоритм для задачи быстродействия с фазовыми ограничениями

В этом разделе дается приложение регуляризирующего алгоритма, построенного в предыдущем разделе, к задаче быстродействия с фазовыми ограничениями при неточно заданных входных данных.

Итак, для n-мерной управляемой системы

$$\dot z(t)=f(z(t),t)+g(z(t),t)u(t), \tag{3.1}$$

функционирующей на отрезке времени $[0,T]$ $(T>0)$, рассмотрим задачу о ее быстрейшем переводе из заданного начального состояния $z^0\in\mathbb{R}^n$ в заданное конечное состояние $z^1\in\mathbb{R}^n$ при наличии фазового ограничения $z(t)\in R(t)$ $(t\in[0,T])$ и геометрическом ограничении на управление $u(t)\in U(t)$ $(t\in[0,T])$ (см. [15]). Здесь $(z,t)\mapsto f(z,t)$ – определенная на $\mathbb{R}^n\times[0,T]$ вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^n$; $(z,t)\mapsto g(z,t)$ – определенная на $\mathbb{R}^n\times[0,T]$ матрица-функция размерности $m\times n$; $R(\cdot)$, $U(\cdot)$ – отображения отрезка $[0,T]$ в классы всех непустых подмножеств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно. Считаем, что $U(t)\subset U_0$ $(t\in[0,T])$, где множество $U_0\subset\mathbb{R}^m$ является ограниченным.

Под управлением будем понимать, как обычно, всякую измеримую ограниченную функцию $u(\cdot):[0,T]\mapsto\mathbb{R}^m$. Траектория системы (3.1) под действием управления $u(\cdot)$ при этом понимается как определенное на $[0,T]$ решение $z(\cdot):t\mapsto z(t)$ (по Каратеодори) уравнения (3.1) с начальным условием $z(0)=z^0$. Пара $x(\cdot)=(z(\cdot),u(\cdot))$, где $u(\cdot)$ – управление и $z(\cdot)$ – траектория под действием $u(\cdot)$, называется управляемым процессом. Будем говорить, что управляемый процесс $x(\cdot)=(z(\cdot),u(\cdot))$ допустим, если для п. в. $t\in[0,T]$ выполняются $z(t)\in R(t)$, $u(t)\in U(t)$ и найдется момент времени $p\in[0,T]$, в который траектория $z(\cdot)$ приходит в предписанное конечное состояние z^1, т. е. $z(p)=z^1$. Обозначим множество всех допустимых управляемых процессов через Π.

Рассматриваемая задача быстродействия, традиционная запись которой

$$
\begin{aligned}
&p \to \min,\\
&\dot z(t) = f(z(t),t) + g(z(t),t)u(t),\\
&z(0) = z^0, \quad z(p) = z^1,\\
&z(t) \in Q(t), \quad u(t) \in U(t),\\
&(t \in [0,T]),
\end{aligned}
$$

может быть, таким образом, также записана в виде экстремальной задачи

$$
\begin{aligned}
p &\to \min,\\
z(p) &= z^1,\\
(z(\cdot),u(\cdot)) &\in \Pi.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Обозначим оптимальное значение задачи (3.2) – время быстродействия – через p_*, а множество всех ее решений – через $\{p_*\}\times\Pi_*$, где $\Pi_*\subset\Pi$; элементы множества Π_* называются оптимальными управляемыми процессами.

Далее будем рассматривать задачу (3.2) при следующих условиях:

(B1) множество Π всех допустимых управляемых процессов непусто;

(B2) $(z,t)\mapsto f(z,t)$ и $(z,t)\mapsto g(z,t)$ – непрерывные функции на $\mathbb{R}^n\times[0,T]$;

(B3) $R(t)$ и $U(t)$ – выпуклые, замкнутые и ограниченные подмножества $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно для всех $t\in[0,T]$;

(B4) многозначные отображения $t\mapsto R(t)$, $t\mapsto U(t)$ измеримы (см. [2]);

(B5) множества $\bigcup\limits_{t\in[0,T]} R(t)$ и $\bigcup\limits_{t\in[0,T]} U(t)$ ограничены.

Условия (B1)–(B5) гарантируют существование решения задачи (3.2).

Тот факт, что в момент времени $p\in[0,T]$ траектория $z(\cdot)$ системы (3.1) под действием управления $u(\cdot)$ приходит в заданное конечное состояние z^1, может быть записан в виде следующих интегральных соотношений:

$$
\begin{aligned}
&z(t) - \int_0^t (f(z(\tau),\tau) + g(z(\tau),\tau)u(\tau))\,d\tau = z^0 \quad (t\in[0,T]),\\
&z(t) + \int_t^p (f(z(\tau),\tau) + g(z(\tau),\tau)u(\tau))\,d\tau = z^1 \quad (t\in[0,p]),\\
&z(t) - \int_p^t (f(z(\tau),\tau) + g(z(\tau),\tau)u(\tau))\,d\tau = z^1 \quad (t\in[p,T]).
\end{aligned}
$$

С другой стороны, если измеримая функция $z(\cdot) : [0,T] \mapsto \mathbb{R}^n$ и управление $u(\cdot)$ удовлетворяют этим равенствам при п. в. $t \in [0,T]$, то $z(\cdot)$ п. в. совпадает с траекторией под действием $u(\cdot)$, приходящей в момент времени p в состояние z^1. Это наблюдение позволяет свести задачу (3.2) к задаче оптимизации в пространстве измеримых расширений управляемых процессов.

Введем гильбертово пространство

$$Y = L^2([0,T], \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

и нормированное пространство

$$X = L^2([0,T], \mathbb{R}^n) \times L^2_w([0,T], \mathbb{R}^m), \tag{3.3}$$

где $L^2_w([0,T], \mathbb{R}^m)$ есть пространство $L^2([0,T], \mathbb{R}^m)$, снабженное слабой нормой (см., например, [2]). В $L^2([0,T], \mathbb{R}^n) \times L^2([0,T], \mathbb{R}^m)$ выделим некоторое ограниченное множество X_0 такое, что все допустимые управляемые процессы $x = (z(\cdot), u(\cdot))$ лежат в X_0 (такое множество существует в силу условия (B5)).

Для каждого $p \in [0,T]$ положим

$$F_1(p,x)(t) = z(t) - \int_0^t (f(z(\tau),\tau) + g(z(\tau),\tau)u(\tau))\,d\tau \quad (t \in [0,T]), \tag{3.4}$$

$$F_2(p,x)(t) = \begin{cases} z(t) + \displaystyle\int_t^p (f(z(\tau),\tau) + g(z(\tau),\tau)u(\tau))\,d\tau & (t \in [0,p]), \\ z(t) - \displaystyle\int_p^t (f(z(\tau),\tau) + g(z(\tau),\tau)u(\tau))\,d\tau & (t \in [p,T]) \end{cases} \tag{3.5}$$

$$(x = (z(\cdot), u(\cdot)))$$

и введем функцию $(p,x) \mapsto F(p,x) : [0,T] \times X_0 \mapsto Y$, полагая

$$F(p,x) = F(p,x)(\cdot) = (F_1(p,x)(\cdot), F_2(p,x)(\cdot)). \tag{3.6}$$

Зададим $b = (b_1(\cdot), b_2(\cdot)) \in Y$ условиями

$$b_1(t) = z^0, \quad b_2(t) = z^1 \quad (t \in [0,T]). \tag{3.7}$$

Наконец, введем множество

$$G = \{x = (z(\cdot), u(\cdot)) \in X_0 : z(t) \in R(t),\ u(t) \in U(t)\ (t \in [0,T])\}. \tag{3.8}$$

Заметим, что $x = (z(\cdot), u(\cdot)) \in X_0$ почти всюду совпадает с допустимым управляемым процессом тогда и только тогда, когда $F(p,x) = b$ и $x \in G$. Таким образом, задача (3.2) эквивалентна задаче оптимизации вида (1.1) в пространстве X (3.3), где $X(p) = G$ (3.8), $b(p) = b$ (3.7) и функция $F(\cdot,\cdot)$ определена по (3.4)–(3.6). Точное утверждение таково.

Теорема 3.1. *Задача* (3.2) *и задача* (1.1), *где* $X(p) = G$, $b(p) = b$, *эквивалентны в следующем смысле:*

(i) *оптимальные значения задач* (3.2) *и* (1.1) *совпадают;*

(ii) *пара* $(p_*, x) \in [0, T] \times X_0$, *где* $x = (z(\cdot), u(\cdot))$, *решает задачу* (1.1) *тогда и только тогда, когда найдется оптимальный управляемый процесс* $(z_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *такой, что* $(z(t), u(t)) = (z_*(t), u_*(t))$ *при п. в.* $t \in [0, T]$.

Далее будем рассматривать задачу (3.2) при следующем дополнительном условии:

(B6) для каждого $p \in [0, p_*]$ множество $F(p, G) = \{F(p, x) : x \in G\}$ выпукло.

Будем предполагать, что измеримое многозначное отображение $t \mapsto U(t)$, заданное на $[0, T]$, зафиксировано и известно точно. Многозначное отображение $t \mapsto R(t)$, определяющее фазовое ограничение, а также остальные данные задачи (3.2) известны неточно. Далее, $L[\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n]$ – линейное пространство всех матриц размерности $n \times m$, снабженное стандартной матричной нормой $|\cdot|_{L[\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n]}$.

Пусть $\widehat{Z}$ – непустое множество наборов $(z^0, z^1, f(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot), R(\cdot))$ данных для задач (3.2). Здесь $z^0, z^1 \in \mathbb{R}^n$, $f(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \mapsto \mathbb{R}^n$ и $g(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \times [0, T] \mapsto L[\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n]$ – непрерывные функции, $R(\cdot)$ – измеримое отображение из $[0, T]$ в множество всех непустых подмножеств $\mathbb{R}^n$. Пусть в $\widehat{Z}$ выделено непустое множество Z, для каждого элемента $(z^0, z^1, f(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot), R(\cdot))$ которого выполняются условия (B1)–(B6). Всякую задачу быстродействия (3.2), где $(z^0, z^1, f(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot), R(\cdot)) \in Z$, будем называть допустимой. По теореме 1.1 из [17] каждая допустимая задача быстродействия имеет решение.

Предполагаем выполненными следующие условия (B7) и (B8) на класс Z.

(B7) Существует ограниченное множество $R_0 \subset \mathbb{R}^n$ такое, что для каждого набора $(z^0, z^1, f(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot), R(\cdot)) \in Z$ выполняется $R(t) \subset R_0$ $(t \in [0, T])$.

Замечание. Для удобства, без нарушения общности, будем далее предполагать, что при некотором $\lambda_0 > 0$ для всех $(z^0, z^1, f(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot), R(\cdot)) \in Z$ выполняется $V_{\mathbb{R}^n}[R(t), \lambda_0] \subset R_0$ $(t \in [0, T])$; здесь и далее $V_{\mathbb{R}^n}[E, \lambda_0]$ – замкнутая окрестность в $\mathbb{R}^n$ множества $E \subset \mathbb{R}^n$.

(B8) множество функций $\{(f(\cdot, t), g(\cdot, t)) : (z^0, z^1, f(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot), R(\cdot)) \in Z, t \in [0, T]\}$ удовлетворяет равномерному условию Липшица на R_0, т. е. существует $K_0 \geqslant 0$ такое, что при любом $(z^0, z^1, f(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot), R(\cdot)) \in Z$

$$|f(z_1, t) - f(z_2, t)|_{\mathbb{R}^n} \leqslant K_0 |z_1 - z_2|_{\mathbb{R}^n},$$
$$|g(z_1, t) - g(z_2, t)|_{\mathbb{R}^n} \leqslant K_0 |z_1 - z_2|_{L[\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n]} \qquad (t \in [0, T],\ z_1, z_2 \in R_0).$$

Считаем, что для конкретной допустимой задачи (3.2) известны набор ее приближенных данных $(\widehat{z}^0, \widehat{z}^1, \widehat{f}(\cdot,\cdot), \widehat{g}(\cdot,\cdot), \widehat{R}(\cdot)) \in \widehat{Z}$ и оценки погрешностей $h^z, h^f, h^g, h^R \geqslant 0$, так что выполняются условия

$$|z^0 - \widehat{z}^0|_{\mathbb{R}^n} \leqslant h^z, \quad |z^1 - \widehat{z}^1|_{\mathbb{R}^n} \leqslant h^z; \tag{3.9}$$

$$|f(z,t) - \widehat{f}(z,t)|_{\mathbb{R}^n} \leqslant h^f, \quad |g(z,t) - \widehat{g}(z,t)|_{L[\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n]} \leqslant h^g \quad (t \in [0,T], z \in R_0); \tag{3.10}$$

$$\chi_{\mathbb{R}^n}(R(t), \widehat{R}(t)) \leqslant h^R \quad (t \in [0,T]). \tag{3.11}$$

Здесь и далее $\chi_{\mathbb{R}^n}(R_1, R_2)$ – хаусдорфово расстояние в пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ между непустыми ограниченными множествами R_1 и R_2.

Множество всех $(\widehat{z}^0, \widehat{z}^1, \widehat{f}(\cdot,\cdot), \widehat{g}(\cdot,\cdot), \widehat{R}(\cdot)) \in \widehat{Z}$, удовлетворяющих (3.9)–(3.11) при некотором $(z^0, z^1, f(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot), R(\cdot)) \in Z$, будем обозначать через $\widehat{Z}(h^z, h^f, h^g, h^R | z^0, z^1, f(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot), R(\cdot))$.

Под регуляризирующим алгоритмом для задачи быстродействия будем понимать семейство $(R_{h^z,h^f,h^g,h^R})_{h^z,h^f,h^g,h^R \geqslant 0}$ операторов, действующих из $\widehat{Z}$ в $[0,T] \times X_0$ такое, что для любых допустимых данных $(z^0, z^1, f(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot),$ $R(\cdot)) \in Z$, любых сходящихся к нулю неотрицательных последовательностей (h^z_j), (h^f_j), (h^g_j), (h^R_j) и любой последовательности $(\widehat{z}^0_j, \widehat{z}^1_j, \widehat{f}_j(\cdot,\cdot), \widehat{g}_j(\cdot,\cdot)\widehat{R}_j(\cdot))$ такой, что

$$(\widehat{z}^0_j, \widehat{z}^1_j, \widehat{f}_j(\cdot,\cdot), \widehat{g}_j(\cdot,\cdot)\widehat{R}_j(\cdot)) \in \widehat{Z}(h^z_j, h^f_j, h^g_j, h^R_j | z^0, z^1, f(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot), R(\cdot))$$

$$(j = 1, 2, \ldots),$$

последовательность (p_j, x_j) $(x_j = (z_j(\cdot), u_j(\cdot))$ вида

$$(p_j, x_j) = R_{h^z_j, h^f_j, h^g_j, h^R_j}(\widehat{z}^0_j, \widehat{z}^1_j, \widehat{f}_j(\cdot,\cdot), \widehat{g}_j(\cdot,\cdot)\widehat{R}_j(\cdot))$$

$$(j = 1, 2, \ldots)$$

сходится к множеству $\{p_*\} \times \Pi_*$ всех решений задачи (3.2) с данными $(z^0, z^1,$ $f(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot), R(\cdot))$, т. е.

$$p_j \to p_*, \quad \mathrm{dist}_X(x_j, \Pi_*) \to 0 \quad (j \to \infty).$$

Положим

$$X_0 = \{(z(\cdot), u(\cdot)) \in X : \ (z(t), u(t)) \in R_0 \times U(t) \ \ (t \in [0,T])\}. \tag{3.12}$$

Объединяя наборы $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot))$, построенные по всевозможным $(z^0, z^1,$ $f(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot), R(\cdot)) \in Z$, получим множество D допустимых задач (1.1), которое ниже зафиксируем. Таким образом, каждая из допустимых задач (1.1) эквивалентна некоторой допустимой задаче быстродействия (3.2). Если набор $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot)) \in D$ построен по набору

$$(z^0, z^1, f(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot), R(\cdot)) \in Z \tag{3.13}$$

и

$$(\widehat{z}^0, \widehat{z}^1, \widehat{f}(\cdot,\cdot), \widehat{g}(\cdot,\cdot), \widehat{R}(\cdot)) \in \widehat{Z}(h^z, h^f, h^g, h^R | z^0, z^1, f(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot), R(\cdot)) \text{ – } \tag{3.14}$$

возмущенные данные для набора (3.13), то по возмущенным данным (3.14) восстанавливаются возмущенные данные $(\widehat{F}(\cdot,\cdot), \widehat{b}(\cdot), \widehat{X}(\cdot))$ задачи (1.1) с данными $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot))$ следующим образом:

$$\widehat{F}(\cdot,\cdot) : [0,T] \times X_0 \mapsto Y,\ \widehat{F}(p,x)(\cdot) = (\widehat{F}_1(p,x)(\cdot), \widehat{F}_2(p,x)(\cdot))\ (p \in [0,T],\ x \in X_0), \tag{3.15}$$

$$\widehat{F}_1(p,x)(t) = z(t) - \int_0^t (\widehat{f}(z(\tau),\tau) + \widehat{g}(z(\tau),\tau)u(\tau))d\tau \quad (t \in [0,T]), \tag{3.16}$$

$$\widehat{F}_2(p,x)(t) = \begin{cases} z(t) + \displaystyle\int_t^p (\widehat{f}(z(\tau),\tau) + \widehat{g}(z(\tau),\tau)u(\tau))\, d\tau & (t \in [0,p]), \\ z(t) - \displaystyle\int_p^t (\widehat{f}(z(\tau),\tau) + \widehat{g}(z(\tau),\tau)u(\tau))\, d\tau & (t \in [p,T]); \end{cases} \tag{3.17}$$

$$\widehat{b} = (\widehat{b}_1(\cdot), \widehat{b}_2(\cdot)) \in Y :\ \widehat{b}_1(t) = \widehat{z}^0,\ \widehat{b}_2(t) = \widehat{z}^1 \quad (t \in [0,T]); \tag{3.18}$$

$$\widehat{X}(p) = \widehat{G} = \{x = (z(\cdot), u(\cdot)) \in X :\ z(t) \in \widehat{R}(t),\ u(t) \in U(t)\ (t \in [0,T])\}. \tag{3.19}$$

Объединяя наборы $(\widehat{F}(\cdot,\cdot), \widehat{b}(\cdot), \widehat{X}(\cdot))$ вида (3.15)–(3.19), построенные по всем наборам (3.14), где $(z^0, z^1, f(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot), R(\cdot))$ пробегает множество Z, а h^z, h^f, h^g, h^R – всю неотрицательную полуось, сконструируем множество $\widehat{D}$ возмущенных допустимых задач. Ясно, что $D \subset \widehat{D}$.

Для построения регуляризирующего алгоритма для задачи быстродействия используем общий регуляризирующий алгоритм, описанный в предыдущем разделе, в применении к введенным выше классу D допустимых задач (1.1) и классу $\widehat{D}$ возмущенных задач (1.1).

Далее для каждого непустого $X_1 \subset X_0$ и каждого $h \geqslant 0$ положим

$$V_X^0[X_1, h] = \{(z(\cdot) + w(\cdot), u(\cdot)) \in X_0 : (z(\cdot), u(\cdot)) \in X_1, \sup_{t \in [0,T]} |w(t)|_{\mathbb{R}^n} \leqslant h\}. \tag{3.20}$$

Заметим, что множества $V^0[X_1, h]$ (3.20) обладают свойствами (2.3)–(2.4).

Следующая лемма показывает, что возмущенная задача (1.1), построенная по возмущенной задаче (3.2), удовлетворяет условиям разд. 1.

Лемма 3.1. *Пусть данные* $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot, X(\cdot)) \in D$ *построены по набору* (3.13) *и возмущенные данные* $(\widehat{F}(\cdot,\cdot), \widehat{b}(\cdot), \widehat{X}(\cdot))$ *построены согласно* (3.15)–(3.19) *по возмущенному набору* (3.14) *с некоторыми* $h^z, h^f, h^g, h^Q \geqslant 0$.

Тогда

$$\left|\widehat{F}(p,x) - F(p,x)\right|_Y \leqslant h^F \quad (p \in [0,T],\ x \in X_0), \tag{3.21}$$

$$\left|\widehat{b}(p) - b(p)\right|_Y \leqslant h^b \quad (p \in [0,T]), \tag{3.22}$$

$$X(p) \subset V_X^0[\widehat{X}(p), h^R], \quad \widehat{X}(p) \subset V_X^0[X(p), h^R] \quad (p \in [0,T]), \tag{3.23}$$

$$\chi_X(\widehat{X}(p), X(p)) \leqslant h^X \quad (p \in [0,T]), \tag{3.24}$$

где

$$h^F = T(h^f + h^g\overline{u}), \quad \overline{u} = \sup_{u \in U_0} |u|_{\mathbb{R}^m}, \tag{3.25}$$

$$h^b = (2T)^{\frac{1}{2}} h^z,$$

$$h^X = T^{\frac{1}{2}} h^R. \tag{3.26}$$

Доказательство. 1. Рассмотрим произвольные $p \in [0,T]$, $x = (z(\cdot), u(\cdot)) \in \in X_0$. Для $F(\cdot,\cdot)$ (3.6), $\widehat{F}(\cdot,\cdot)$ (3.15) верно

$$\begin{aligned}\left|F(p,x) - \widehat{F}(p,x)\right|_Y^2 = \int_0^T \left|F_1(p,x)(t) - \widehat{F}_1(p,x)(t)\right|_{\mathbb{R}^n}^2 dt + \\ + \int_0^T \left|F_1(p,x)(t) - \widehat{F}_1(p,x)(t)\right|_{\mathbb{R}^n}^2 dt.\end{aligned} \tag{3.27}$$

В силу (3.5) функции $(f(\cdot,\cdot), \widehat{f}(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot), \widehat{g}(\cdot,\cdot))$ удовлетворяют (3.10).

Поэтому для первого слагаемого в (3.27) имеем оценку

$$\begin{aligned}\int_0^T \left|F_1(p,x)(t) - \widehat{F}_1(p,x)(t)\right|_{\mathbb{R}^n}^2 dt \leqslant \int_0^T \int_0^t \left|f(z(\tau),\tau) - \widehat{f}(z(\tau),\tau)\right|_{\mathbb{R}^n}^2 d\tau dt + \\ + \int_0^T \int_0^t \left|g(z(\tau),\tau) - \widehat{g}(z(\tau),\tau)\right|_{\mathbb{R}^m}^2 \left|u(\tau)\right|_{\mathbb{R}^m}^2 d\tau dt \leqslant \\ \leqslant \frac{T^2}{2}\left[(h^f)^2 + (h^g)^2\overline{u}^2\right].\end{aligned} \tag{3.28}$$

Аналогично для второго слагаемого в (3.27) получаем оценку

$$\int_0^T \left|F_2(p,x)(t) - \widehat{F}_2(p,x)(t)\right|^2_{\mathbb{R}^n} dt \leqslant \int_0^p \int_t^p \left|f(z(\tau),\tau) - \widehat{f}(z(\tau),\tau)\right|^2_{\mathbb{R}^n} d\tau dt +$$
$$+ \int_0^p \int_t^p \left|g(z(\tau),\tau) - \widehat{g}(z(\tau),\tau)\right|^2_{\mathbb{R}^m} \left|u(\tau)\right|^2_{\mathbb{R}^m} d\tau dt +$$
$$+ \int_p^T \int_p^t \left|f(z(\tau),\tau) - \widehat{f}(z(\tau),\tau)\right|^2_{\mathbb{R}^n} d\tau dt +$$
$$+ \int_p^T \int_p^t \left|g(z(\tau),\tau) - \widehat{g}(z(\tau),\tau)\right|^2_{\mathbb{R}^m} \left|u(\tau)\right|^2_{\mathbb{R}^m} d\tau dt \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{T^2}{2} + p^2 - pT\right)\left((h^f)^2 + (h^g)^2\overline{u}^2\right). \tag{3.29}$$

Принимая во внимание (3.28), (3.29), продолжим (3.27):

$$\left|F(p,x) - \widehat{F}(p,x)\right|^2_Y \leqslant \left(T^2 + p^2 - pT\right)\left((h^f)^2 + (h^g)^2\overline{u}^2\right) \leqslant$$
$$\leqslant T^2\left((h^f)^2 + (h^g)^2\overline{u}^2\right) \leqslant T^2\left(h^f + h^g\overline{u}\right)^2.$$

Используя обозначение (3.25), получаем (3.21).

2. В силу (3.14) z^0, $\widehat{z}^0 \in \mathbb{R}^n$ и z^1, $\widehat{z}^1 \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяют (3.9). Тогда для $b \in Y$ (3.7) и $\widehat{b} \in Y$ (3.18) верно

$$\left|b - \widehat{b}\right|^2_Y = \int_0^T \left|z^0 - \widehat{z}^0\right|^2_{\mathbb{R}^n} dt + \int_0^T \left|z^1 - \widehat{z}^1\right|^2_{\mathbb{R}^n} dt \leqslant 2T(h^z)^2.$$

Таким образом, показано (3.22).

3. Пусть $(z(\cdot), u(\cdot))$ – произвольный элемент из $X(p)$. По определению $X(p)$ (3.19) $(z(t), u(t)) \in R(t) \times U(t)$ $(t \in [0,T])$. В силу (3.14) многозначные отображения $R(\cdot)$, $\widehat{R}(\cdot)$ удовлетворяют (3.11). Поэтому существует измеримая функция $w(\cdot) : [0,T] \mapsto \mathbb{R}^n$ такая, что

$$\sup_{t \in [0,T]} |w(t)|_{\mathbb{R}^n} \leqslant h^R \tag{3.30}$$

и

$$\widehat{z}(t) = z(t) + w(t) \in \widehat{R}(t) \quad (t \in [0,T]). \tag{3.31}$$

Таким образом,

$$(z(t), u(t)) \in \widehat{R}(t) \times U(t) \quad (t \in [0,T]),$$

что означает (см. (3.19)), что $(\widehat{z}(\cdot), u(\cdot)) \in \widehat{X}(p)$. Поскольку $z(\cdot) = \widehat{z}(\cdot) - w(\cdot)$ и выполняется (3.30), то $(z(\cdot), u(\cdot)) \in V^0[\widehat{X}(p), h^R]$ (см. (3.20)). В силу произвольности $(z(\cdot), u(\cdot)) \in X(p)$ получаем, что $X(p) \subset V^0[\widehat{X}(p), h^R]$. Аналогично показываем, что $\widehat{X}(p) \subset V^0[X(p), h^R]$. Соотношения (3.23) установлены.

4. Для произвольного элемента $(z(\cdot), u(\cdot)) \in X(p)$ и элемента вида (3.31), (3.30) $(\widehat{z}(\cdot), u(\cdot)) \in X(p)$ выполняется

$$\big|(z(\cdot), u(\cdot)) - (\widehat{z}(\cdot), u(\cdot))\big|_X = \big|z(\cdot) - \widehat{z}(\cdot)\big|_{L^2([0,T],\mathbb{R}^n)} =$$
$$= \left(\int_0^T |w(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant T^{1/2} h^R = h^X.$$

Следовательно, имеем $X(p) \in V_X[\widehat{X}(p), h^X]$. Аналогично показываем, что $\widehat{X}(p) \in V_X[\widehat{X}(p), h^X]$. Отсюда верно (3.24). Лемма доказана.

Замечание. Повторяя с небольшими модификациями рассуждения п. 4 в доказательстве леммы 3.1, нетрудно показать, что для любого $X_1 \subset X_0$ и любого $h > 0$ выполняется $V_X^0[X_1, h] \subset V_X[X_1, T^{\frac{1}{2}} h]$ или $V_X^0[X_1, \overline{c}h] \subset V_X[X_1, h]$, где $\overline{c} = T^{-\frac{1}{2}}$.

Ниже зафиксируем данное значение $\overline{c}$. Замечание говорит о том, что множества $V_X^0[X_1, h]$ $(X_1 \subset X_0, h \geqslant 0)$ удовлетворяют условиям, наложенным на эти множества в разделе 1. Далее, ввиду (3.26), соотношения (3.23), (3.24) можно записать как

$$X(p) \subset V_X^0[\widehat{X}(p), \overline{c}h^X], \quad \widehat{X}(p) \subset V_X^0[X(p), \overline{c}h^X].$$

Таким образом, лемма 3.1 показывает, что в ее условиях возмущенные данные $(\widehat{F}(\cdot,\cdot), \widehat{b}(\cdot), \widehat{X}(\cdot))$ задачи (1.1) удовлетворяют, по отношению к невозмущенным данным $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot))$ задачи (1.1), условиям (1.2), (1.3), (1.5). Следовательно, созданы информационные предпосылки для применения к задаче (1.1) с возмущенными данными общего регуляризирующего алгоритма, описанного в разделе 2.

Для обоснованного применения общего регуляризирующего алгоритма, описанного в разделе 2, следует проверить, что определенный выше класс D данных допустимых задач (1.1), эквивалентный исходному классу Z допустимых задач быстродействия (3.2), удовлетворяет всем условиям, наложенным на класс D данных допустимых задач (1.1) в разделе 2. Данная проверка осуществляется леммой 3.2.

Лемма 3.2. *Каждая тройка* $(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot)) \in D$ *удовлетворяет условиям* (A1)–(A10)*. Кроме того, класс* D *удовлетворяет условию* (A11)*, где*

$$\kappa(h) = 2T^{3/2}(K_0(1 + \overline{u}))^{1/2} h^{1/2}. \tag{3.32}$$

Доказательство. По исходному предположению для произвольного набора

$$(z^0, z^1, f(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot), R(\cdot)) \in Z$$

выполняются условия (B1)–(B6). Доказательство того, что каждая тройка

$$(F(\cdot,\cdot), b(\cdot), X(\cdot)) \in D \tag{3.33}$$

удовлетворяет условиям (A1)–(A10), можно найти в [17] (лемма 5.1).

Докажем второе утверждение леммы. Возьмем произвольную тройку (3.33). Пусть $p \in [0,T]$, $h \geqslant 0$ и

$$y(\cdot) \in F(p, V_X^0[X(p), h]). \tag{3.34}$$

Следует показать, что

$$y(\cdot) \in V_Y[F(p, X(p)), \kappa(h)]. \tag{3.35}$$

Возьмем набор (3.13), по которому построена тройка (3.33). По построению этой тройки

$$X(p) = G = \{x(\cdot) = (z(\cdot), u(\cdot)) \in X_0 : \ z(t) \in R(t), \ u(t) \in U(t) \ (t \in [0,T])\} \tag{3.36}$$

(см. (3.19)). Отсюда, из (3.34), вида $F(\cdot,\cdot)$ (см. (3.4)–(3.6)) и определения $V_X^0[X(p), h]$ (см. (3.30)) заключаем, что

$$y(\cdot) = (y_1(\cdot), y_2(\cdot)) = (F_1(p, x(\cdot) + \xi(\cdot)), F_2(p, x(\cdot) + \xi(\cdot))),$$

при некоторых

$$x(\cdot) = (z(\cdot), u(\cdot)) \in G, \quad \xi(\cdot) = (w(\cdot), 0) \in X$$

таких, что

$$x(\cdot) + \xi(\cdot) \in X_0, \tag{3.37}$$

$$|\xi(\cdot)|_X^2 = |w(\cdot)|^2_{L^2([0,T],\mathbb{R}^n)} \leqslant h^2. \tag{3.38}$$

Пусть

$$\overline{y}(\cdot) = (\overline{y}_1(\cdot), \overline{y}_2(\cdot)) = F(p, x(\cdot)) = (F_1(p, x(\cdot)), F_2(p, x(\cdot))).$$

Для доказательства (3.35) достаточно показать, что

$$|y(\cdot) - \overline{y}(\cdot)|_Y^2 = |y_1(\cdot) - \overline{y}_1(\cdot)|^2_{L^2([0,T],\mathbb{R}^n)} + |y_1(\cdot) - \overline{y}_1(\cdot)|^2_{L^2([0,T],\mathbb{R}^n)} \leqslant \kappa^2(h). \tag{3.39}$$

Покажем это. Рассмотрим первое слагаемое в средней части (3.39). Используя вид $F_1(\cdot,\cdot)$ (3.4), при каждом $t \in [0,T]$ имеем

$$y_1(\cdot) - \overline{y}_1(\cdot) = \int_0^t [f(z(\tau)+w(\tau),\tau) + g(z(\tau)+w(\tau),\tau)u(\tau)]\,d\tau -$$
$$- \int_0^t [f(z(\tau),\tau) - f(z(\tau),\tau) + g(z(\tau),\tau)u(\tau)]\,d\tau =$$
$$= \int_0^t [f(z(\tau)+w(\tau),\tau) - f(z(\tau),\tau)]\,d\tau +$$
$$+ \int_0^t [g(z(\tau)+w(\tau),\tau) - g(z(\tau),\tau)]u(\tau)\,d\tau. \qquad (3.40)$$

Так как $G \subset X_0$ (см. (3.36)) и верно (3.37), то, обращаясь к виду X_0 (3.12), заключаем, что $z(\tau), z(\tau)+w(\tau) \in Z_0$ ($\tau \in [0,T]$). Поэтому на основании условия (B9)

$$\int_0^t |f(z(\tau)+w(\tau),\tau) - f(z(\tau),\tau)|_{\mathbb{R}^n} d\tau \leqslant \int_0^t K_0 |w(\tau)|_{\mathbb{R}^n} d\tau \leqslant$$
$$\leqslant K_0 T^{1/2} \left(\int_0^T |w(\tau)|^2_{\mathbb{R}^n} d\tau \right)^{1/2} \leqslant K_0 T^{1/2} |w(\cdot)|_{L^2([0,T],\mathbb{R}^n)} d\tau \leqslant K_0 T^{1/2} h$$

(при получении последнего неравенства мы использовали (3.38)). Аналогично,

$$\int_0^t \big|[g(z(\tau)+w(\tau),\tau) - g(z(\tau),\tau)]u(\tau)\big|_{\mathbb{R}^n} d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \overline{u} T^{1/2} |w(\cdot)|_{L^2([0,T],\mathbb{R}^n)} d\tau \leqslant \overline{u} K_0 T^{1/2} h.$$

Возвращаясь к (3.40), получаем

$$|y_1(t) - \overline{y}_1(t)|^2_{\mathbb{R}^n} \leqslant (\overline{u}+1) K_0 T^{1/2} h.$$

Аналогично, используя вид $F_2(\cdot,\cdot)$ (3.5), приходим к оценке

$$|y_2(t) - \overline{y}_2(t)|^2_{\mathbb{R}^n} \leqslant (\overline{u}+1) K_0 T^{1/2} h.$$

Из полученных оценок, справедливых для произвольного $t \in [0,T]$, извлекаем

$$|y_1(\cdot) - \overline{y}_1(\cdot)|^2_{L^2([0,T],\mathbb{R}^n)} \leqslant T[(\overline{u}+1) K_0 T^{1/2} h]^2,$$
$$|y_2(\cdot) - \overline{y}_2(\cdot)|^2_{L^2([0,T],\mathbb{R}^n)} \leqslant T[(\overline{u}+1) K_0 T^{1/2} h]^2,$$

откуда следует нужная оценка (3.39) (см. определение $\kappa(\cdot)$ (3.32)).

Лемма доказана.

Конкретизируем, применительно к допустимым задачам (1.1), построенным по допустимым задачам быстродействия (3.2), общий итерационный метод (2.34)–(2.41), описанный в разделе 2. Сначала конкретизируем основной элемент этого раздела – вид опорного функционала (2.36).

Лемма 3.3. *Пусть тройка* $(\widehat{F}(\cdot,\cdot), \widehat{b}(\cdot), \widehat{X}(\cdot)) \in \widehat{D}$ *построена по данным* $(\widehat{z}^0, \widehat{z}^1, \widehat{f}(\cdot,\cdot), \widehat{g}(\cdot,\cdot), \widehat{R}(\cdot)) \in \widehat{Z}$ *согласно* (3.15)–(3.19), $\ell = (\ell^1(\cdot), \ell^2(\cdot)) \in Y$, $p \in [0,T]$, $h^R \in [0, \frac{\lambda_0}{2}]$ (λ_0 *определено в замечании* 3.5) *и* $h^X = T^{\frac{1}{2}} h^R = \overline{c}^{-1} h^R$. *Тогда*

$$c(\ell|\widehat{F}(p, V_X^0[\widehat{X}(p), h^R])) = c(\ell|\widehat{F}(p, V_X^0[\widehat{X}(p), \overline{c}h^X])) = \int_0^T c(m(p,t)|\widehat{W}(t))\, dt, \tag{3.41}$$

где

$$m(p,t) = (\ell^1(t) + \ell^2(t), r^1(p,t) + r^2(p,t)), \tag{3.42}$$

$$r^1(p,t) = -\int_t^T \ell^1(\tau) d\tau, \quad r^2(p,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \ell^2(\tau)\, d\tau, & t \in [0,p], \\ \displaystyle 7 - \int_t^T \ell^2(\tau)\, d\tau, & t \in [p,T], \end{cases} \tag{3.43}$$

$$\widehat{W}(t) = \{\widehat{w}(t,z,u) \in \mathbb{R}^n : \widehat{w}(t,z,u) = (z, \widehat{f}(z,t) + \widehat{g}(z,t)u),$$
$$z \in V_{\mathbb{R}^n}[\widehat{R}(t), h^R],\ u \in U(t) \quad (t \in [0,T])\}. \tag{3.44}$$

Доказательство. Условие $h^R \leqslant \lambda_0^{1/2}$ вместе с включением $V_{\mathbb{R}^n}[\widehat{R}(t), \lambda_0] \subset R_0$ $(t \in [0,T])$, которое следует из замечания 3.5, обеспечивает тот факт, что $V_{\mathbb{R}^n}[\widehat{R}(t), h^R] \subset R_0$ $(t \in [0,T])$. Поэтому для любой пары $x = (z(\cdot), u(\cdot)) \in \widehat{X}(p)$ (см. (3.19)) и любой измеримой функции $w(\cdot) : [0,T] \mapsto \mathbb{R}^n$ такой, что $|w(t)|_{\mathbb{R}^n} \leqslant h^R$ $(t \in [0,T])$, выполняется $z(t) + w(t) \in R_0$ $(t \in [0,T])$, т.е. $(z(\cdot) + w(\cdot),\ u(\cdot)) \in X_0$ (см. определение X_0 (3.12)). Следовательно, в силу определения $V^0[\widehat{X}(p), h^R]$ (см. (3.20)), последнее множество имеет вид

$$V_X^0[\widehat{X}(p), h^R] = \{(z(\cdot) + w(\cdot), u(\cdot)) : (z(\cdot), u(\cdot)) \in \widehat{X}(p),$$
$$w(\cdot) \text{ измерима}, \sup_{t \in [0,T]} |w(t)|_{\mathbb{R}^n} \leqslant h^R\}$$

или, с учетом вида $\widehat{X}(p)$ (3.19),

$$V_X^0[\widehat{X}(p), h^R] = \{(z(\cdot), u(\cdot)) \in X\colon z(t) \in V_{\mathbb{R}^n}[\widehat{R}(t), R(t)],\ u(t) \in U(t)\ (t \in [0,T])\}.$$

Из этого представления и вида $\widehat{F}(\cdot,\cdot)$ (3.15)–(3.17) получаем (3.41). Лемма доказана.

Теперь опишем конкретную реализацию общего итерационного алгоритма (2.34)–(2.41) применительно к задаче быстродействия (3.2).

Пусть задан набор

$$(\widehat{z}^0, \widehat{z}^1, \widehat{f}(\cdot,\cdot), \widehat{g}(\cdot,\cdot), \widehat{R}(\cdot)) \in \widehat{Z} \tag{3.45}$$

возмущенных данных задачи быстродействия и набор $h^z, h^f, h^g, h^R \geqslant 0$ точностей этих данных. По набору (3.45) строим возмущенные данные $(\widehat{F}(\cdot,\cdot), \widehat{b}(\cdot), \widehat{X}(\cdot)) \in \widehat{D}$ по формулам (3.15)–(3.19) и задаем параметры точности, как указано в лемме 3.1:

$$\begin{aligned} h^F &= T(h^f + h^g\overline{u}), \quad \overline{u} = \sup_{u\in U_0} |u|_{\mathbb{R}^m}, \\ h^b &= (2T)^{\frac{1}{2}} h^z, \\ h^X &= T^{\frac{1}{2}} h^R = \overline{c}^{-1} h^R. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Алгоритм (2.34)–(2.41) в соответствии с леммой 3.2 принимает следующую форму (для удобства у вспомогательного элемента $v_k \in X$ выделяем его компоненты: $v_k = (v_k^z(\cdot), v_k^u(\cdot))$, где $v_k^z(\cdot) \in L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$, $v_k^u(\cdot) \in L_w^2([0,T],\mathbb{R}^m)$.

На нулевом шаге полагается

$$p_0 = 0, \quad \alpha_0^{(0)} = 1 \tag{3.47}$$

и выбирается пара измеримых функций $(v_0^z(\cdot), v_0^u(\cdot))$ таких, что

$$v_0^z(t) \in V_{\mathbb{R}^n}[\widehat{R}(t), h^R] = V_{\mathbb{R}^n}[\widehat{R}(t), \overline{c}h^X] \quad (t \in [0,T]). \tag{3.48}$$

Набор $(p_0, v_0^z(\cdot), v_0^u(\cdot), \alpha_0^{(0)})$ выбирается в качестве начального элемента последовательности. На шаге $k+1$ по набору

$$(p_k, \alpha_0^{(k)}, \ldots, \alpha_k^{(k)}, v_0^z(\cdot), v_0^u(\cdot), \ldots, v_k^z(\cdot), v_k^u(\cdot)),$$

где

$$p_k \in [0,T], \quad \alpha_0^{(k)}, \ldots, \alpha_k^{(k)} \in [0,1],$$
$$v_0^z(\cdot), \ldots, v_k^z(\cdot) \in L^2([0,T],\mathbb{R}^n), \quad v_0^u(\cdot), \ldots, v_k^u(\cdot) \in L^2([0,T],\mathbb{R}^m),$$

находится набор $(p_{k+1}, \alpha_0^{(k+1)}, \ldots, \alpha_{k+1}^{(k+1)}, v_0^z(\cdot), v_0^u(\cdot), \ldots, v_{k+1}^z(\cdot), v_{k+1}^u(\cdot))$, где

$$p_{k+1} \in [0,T], \quad \alpha_0^{(k+1)}, \ldots, \alpha_{k+1}^{(k+1)} \in [0,1],$$

$$v_0^z(\cdot), \ldots, v_{k+1}^z(\cdot) \in L^2([0,T],\mathbb{R}^n), \quad v_0^u(\cdot), \ldots, v_{k+1}^u(\cdot) \in L^2([0,T],\mathbb{R}^m).$$

Полагается

$$\widehat{\ell}_k(t) = \widehat{\overline{z}} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(k)} \widehat{F}(p_k, v_i)(t) \quad (\widehat{\overline{z}} = (\widehat{z}^0, \widehat{z}^1),\ t \in [0,T]). \tag{3.49}$$

Последовательно при $p \in [p_k, T]$, $t \in [0,T]$ формируются

$$\widehat{r}_k^1(p,t) = -\int_t^T \widehat{\ell}_k^1(\tau)d\tau, \quad \widehat{r}_k^2(p,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \widehat{\ell}_k^2(\tau)\,d\tau, & t \in [0, p_k], \\ \displaystyle -\int_t^T \widehat{\ell}_k^2(\tau)\,d\tau, & t \in [p_k, T], \end{cases} \tag{3.50}$$

$$\widehat{m}_k(p,t) = \Big(\widehat{\ell}_k^1(t) + \widehat{\ell}_k^2(t), \widehat{r}_k^1(p,t) + \widehat{r}_k^2(p,t)\Big) \tag{3.51}$$

и множество $\widehat{W}(t)$ (3.44), и с их помощью генерируется функция

$$\widehat{\varphi}_k(p) = \int_0^T \Big(c(\widehat{m}_k(p,t)|\widehat{W}(t)) - \big\langle \widehat{\overline{z}}, \ell_k(t)\big\rangle_{R^{2n}}\Big)\,dt \quad (p \in [p_k, T]). \tag{3.52}$$

Находится число

$$p_{k+1} = \inf\{p \in [p_k, T] :\ \widehat{\varphi}_k(p) \geqslant -L(h^F + h^b)\}. \tag{3.53}$$

Определяется пара измеримых функций $(v_{k+1}^z(\cdot), v_{k+1}^u(\cdot))$ таких, что

$$(v_{k+1}^z(t), v_{k+1}^u(t)) \in \widehat{W}(t) \quad (t \in [0,T]) \tag{3.54}$$

и

$$\big\langle \widehat{m}_k(p,t), \widehat{w}(t, v_{k+1}^z(t), v_{k+1}^u(t))\big\rangle_{R^{2n}} - \big\langle \widehat{\overline{z}}, \widehat{\ell}_k(t)\big\rangle_{R^{2n}} \geqslant \frac{-2(h^F + h^b)L}{T} \tag{3.55}$$
$$(p \in [p_k, T],\ t \in [0,T]),$$

где $\widehat{w}(t,z,u) = (z, \widehat{f}(z,t) + \widehat{g}(z,t)u)$ ($z \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0,T]$). Значение τ_{k+1} определяется из

$$\tau_{k+1} = \begin{cases} 0, & \tau_{k+1}^* < 0, \\ \tau_{k+1}^*, & \tau_{k+1}^* \in [0,1], \\ 1, & \tau_{k+1}^* > 1, \end{cases} \tag{3.56}$$

$$\tau_{k+1}^* = \frac{\displaystyle\int_0^T \big\langle \widehat{q}_{k+1}(t), \overline{z} - \widehat{q}_{k+1}(t) + \widehat{F}(p_{k+1}, v_{k+1})(t)\big\rangle_{R^{2n}}\,dt}{\displaystyle\int_0^T |\widehat{q}_{k+1}(t)|_{R^{2n}}^2\,dt}$$

$$\left(\widehat{q}_{k+1}(t) = \widehat{F}(p_{k+1}, v_{k+1})(t) - \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^{(k)} \widehat{F}(p_{k+1}, v_i)(t) \not\equiv 0\right),$$

$$\tau_{k+1} \in [0,1] \quad (\widehat{q}_{k+1} \equiv 0). \tag{3.57}$$

Полагается

$$\alpha_i^{(k+1)} = (1-\tau_{k+1})\alpha_i^{(k)} \quad (i = 0, \dots, k), \quad \alpha_{k+1}^{(k+1)} = \tau_{k+1}. \tag{3.58}$$

Теперь, основываясь на итерационном методе (3.47)–(3.58), конкретизируем вид описанного в разделе 2 регуляризирующего алгоритма (см. теорему 2.1) применительно к решению задачи быстродействия (3.2). Зафиксируем положительные функции $w(\cdot,\cdot,\cdot)$, $\zeta(\cdot,\cdot,\cdot)$ трех неотрицательных аргументов такие, что $w(h^F, h^b, h^X) \to 0$, $\zeta(h^F, h^b, h^X) \to 0$ при $h^F, h^b, h^X \to 0$. Для определенного выше класса $\widehat{D}$ данных допустимых задач (1.1) зафиксируем функцию $\delta(\cdot,\cdot,\cdot)$, определенную в лемме 3.3 (см. также замечание 3.3).

Для произвольных $h^z, h^f, h^g, h^R \geqslant 0$ введем оператор R_{h^z,h^f,h^g,h^R}, действующий из $\widehat{Z}$ в $[0,T] \times X_0$ следующим образом. Пусть задан набор

$$(\widehat{z}^0, \widehat{z}^1, \widehat{f}(\cdot,\cdot), \widehat{g}(\cdot,\cdot), \widehat{R}(\cdot)) \in \widehat{Z} \tag{3.59}$$

возмущенных данных задачи быстродействия и набор $h^z, h^f, h^g, h^Q \geqslant 0$ точностей этих данных. По набору (3.59) строим возмущенные данные $\widehat{F}(\cdot,\cdot)$, $\widehat{b}(\cdot), \widehat{X}(\cdot) \in \widehat{D}$ по формулам (3.15)–(3.19) и задаем параметры точности (h^F, h^b, h^X) (3.46). Если не существует набора $(z^0, z^1, f(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot), R(\cdot)) \in Z$ такого, что

$$(\widehat{z}^0, \widehat{z}^1, \widehat{f}(\cdot,\cdot), \widehat{g}(\cdot,\cdot), \widehat{R}(\cdot)) \in \widehat{Z}(h^z, h^f, h^g, h^R | z^0, z^1, f(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot), R(\cdot)) \tag{3.60}$$

(такой случай при правильном задании погрешностей приближенных данных не реализуется, его описываем лишь для соблюдения формальной строгости изложения), то

$$(\widehat{p}, \widehat{x}) = R_{h^z,h^f,h^g,h^R}(\widehat{z}^0, \widehat{z}^1, \widehat{f}(\cdot,\cdot), \widehat{g}(\cdot,\cdot), \widehat{R}(\cdot)) \tag{3.61}$$

полагается произвольным элементом из $[0,T] \times X_0$. Если набор $(z^0, z^1, f(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot), R(\cdot)) \in Z$, удовлетворяющий (3.60), существует, то

(i) с помощью итерационного алгоритма (3.47)–(3.58) строится последовательность $(p_k, \alpha_0^{(k)}, \dots, \alpha_k^{(k)}, v_k)$ и находится такой номер $\widehat{k}$, что выполняется

$$\left|\sum_{i=0}^{\widehat{k}} \alpha_i^{(\widehat{k})} \widehat{F}(p_{\widehat{k}}, v_i) - \widehat{b}(p_{\widehat{k}})\right| \leqslant \delta^{1/2}(h^F, h^b, h^X) + (h^F + h^b) + w(h^F, h^b, h^X);$$

(ii) определяется такой $x_{\widehat{k}} \in V_X[\widehat{X}(p_{\widehat{k}}), h^X]$, что

$$\left| \widehat{F}(p_{\widehat{k}}, x_{\widehat{k}}) - \sum_{i=0}^{\widehat{k}} \alpha_i^{(\widehat{k})} \widehat{F}(p_{\widehat{k}}, v_i) \right|_Y \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{x \in V_X[\widehat{X}(p_{\widehat{k}}), h^X]} \left| \widehat{F}(p_{\widehat{k}}, x) - \sum_{i=0}^{\widehat{k}} \alpha_i^{(\widehat{k})} \widehat{F}(p_{\widehat{k}}, v_i) \right|_Y + \zeta(h^F, h^b, h^X);$$

(iii) значение $(\widehat{p}, \widehat{x})$ (3.61) полагается равным $(p_{\widehat{k}}, x_{\widehat{k}})$.

Конкретизируя теорему 2.1, получаем следующий результат.

Теорема 3.2. *Семейство* $(R_{h^z, h^f, h^g, h^R})_{h^z, h^f, h^g, h^R \geqslant 0}$ *есть регуляризирующий алгоритм для задачи быстродействия* (3.2).

Литература

1. Бакушинский А. Б., Гончарский А. В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во. МГУ, 1989.

2. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

3. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.

4. Васин В. В., Агеев А. Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993.

5. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.

6. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

7. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. К регуляризации выпуклой экстремальной задачи с неточно заданными ограничениями. Приложение к задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями // Некоторые методы позиционного и программного управления. Свердловск: УНЦ, 1987.

8. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. Об одном алгоритмическом критерии разрешимости игровых задач для линейных управляемых систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6, № 1. С. 2–10.

9. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. Экстремальные задачи с отделимыми графиками// Кибернетика и системный анализ. 2002. № 2. С. 32–55.

10. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С., Максимов В. И. О восстановлении экстремальных возмущений в параболических уравнениях // Журн. вычислит. математики и матем. физики. 1997. Т. 37, № 3. С. 291–301.

11. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. О процедуре решения задачи управления с фазовыми ограничениями // Жури. вычислит. математики и матем. физики. 1998. Т. 38, № 9. С. 1484–1489.

12. Кряжимский А. В., Пащенко С. В. К решению линейной задачи быстродействия со смешанными ограничениями // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения / ВИНИТИ. 2002. Т. 90. С. 232–260.

13. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.

14. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.

15. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.

16. Ровенская Е. А. К решению задачи об оптимальном параметре совместности для одного класса уравнений в банаховом пространстве // Жури. вычислит. математики и матем. физики. 2004. Т. 44, № 12. С. 2150–2166.

17. Ровенская Е. А. К решению задачи быстродействия со смешанными ограничениями // Нелинейная динамика и управление. М.: Изд-во. МГУ, 2005. № 5. С. 186–212.

18. Тихонов А. П., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.

19. Тихонов А. П., Леонов А. С., Ягола А. Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.

20. Digas B. V., Lander A. V., Paprzycki M. et al. Parallel algorithms for problems of a medium structure reconstruction // Intern. Conf. Distributed Systems: Optimization and Economic-Environmental Applications. Ekaterinburg, Russia, 30 May–2 June, 2000. Ekaterinburg, 2000. P. 293–294.

21. Kryazhimskiy A. V. Convex optimization via feedbacks // SIAM J. Control Optimization. 1999. Vol. 37, № 1. P. 278–302.

22. Kryazhimskiy A. V. Optimization problems with convex epigraphs. Application to optimal control // Int. J. Applied Mathem. Computer Science. 2001. Vol. 11, № 4. P. 101–129.

23. Kryazhimskiy A. V., Digas B. V., Ermoliev Yu. M. Guaranteed optimization in insurance of catastrophic risks // Int. Inst. Applied Systems Analysis. Laxenburg, Austria. IR-98-082. 1998.

24. Kryazhimskiy A. V., Ermoliev Yu. M., Ruszczynski A. Constraint aggregation principle in convex optimization // Mathem. Programming. Ser. B. 1997. Vol. 76. P. 353–372.

25. Kryazhimskiy A. V., Kappel F., Maksimov V. I. Constraint aggregation principle in the problem of optimal control of distributed parameter systems // Nonsmooth and Discontinuous Problems of Control and Optimization. Proc. volume from the IFAC Workshop, Chelyabinsk, Russia, 17–20 June, 1998. Pergamon, 1999. P. 137–141.

26. Kryazhimskiy A. V., Maksimov V. I. A solution algorithm for problems of optimal control in Hilbert spaces // J. Mathem. Sci. 2004. Vol. 121, № 2. P. 2226–2247.

27. Kryazhimskiy A. V., Maksimov V. I. Parallelization in an algorithm of multidimensional nonconvex optimization: an application to insurance network design // Eds. R. Wyrzykowski et al. Parallel Processing and Applied Mathem. LNCS 3019. Springer Verlag, B.; Heidelberg, 2004. P. 754–761.

28. Kryazhimskiy A. V., Paschenko S. V. Distribution of resources and problem of optimial compatibility // Proc. Intern. Conf. Distrubuted Systems: Optimization and Economic-Environmental Applications, Ekaterinburg, 30 May–2 June, 2000. Ekaterinburg: Urals Branch, RAS, 2000. P. 210–212.

29. Kryazhimskiy A. V., Paschenko S. V. On the problem of optimal compatibility // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2001. Vol. 9, № 3. P. 283–300.

30. Kryazhimskiy A. V., Ruszczynski A. Constraint aggregation in infinite-dimensional spaces and applications // Math. Oper. Res. 2001. Vol. 26, № 4. P. 769–795.